

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра "Трибології, автомобілів та матеріалознавства"

ЛОГІСТИКА НА АВТОМОБІЛЬНОМУ ТРАНСПОРТІ

Лабораторний практикум
для студентів
напряму підготовки 274 – "Автомобільний транспорт"

Друкується за рішенням
науково-методичної ради ХНУ
Протокол № 2 від 25.06.2019 р.

2019

Лабораторний практикум з курсу "Логістика на автомобільному транспорті", для студентів напряму підготовки 274 – "Автомобільний транспорт" / Розроб. О.П. Бабак, Маковкін О.М., проф. Диха О.В., – Хмельницький: ХНУ, 2019. – 64 с.

Укладачі: Бабак О. П., канд. техн. наук, доц.;
 Диха О.В., д-р техн. наук, проф.;
 Маковкін О. М., канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск: Диха О.В., д-р техн. наук, проф.

Відповідальний за випуск, комп'ютерний набір та верстка:

ЗМІСТ

	Вступ.....	4
1.	Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт.....	6
2.	Лабораторний практикум.....	8
	Лабораторна робота №1: Оптимізація вантажопотоків.....	8
	Лабораторна робота №2. Оптимізація партії вантажу.....	18
	Лабораторна робота №3. Оптимізація величини замовлення вантажу..	24
	Лабораторна робота №4. Оптимізація розподілу транспортних потоків за допомогою моделі графів.....	30
	Лабораторна робота №5. Прогнозування величини матеріалопотоку в автотранспортній системі.....	38
	Лабораторна робота №6 . Прогнозування обсягу перевезень автотранспортним підприємством за допомогою моделі розвитку.....	44
	Лабораторна робота №7. Прогнозування обсягу перевезень автотранспортним підприємством за допомогою моделей "попит – пропозиція" та еластичності.....	52
	Рекомендована література.....	62

ВСТУП

Транспорт є однією з найважливіших галузей економіки України, частка якого в структурі ВВП становить близько 12 %. Від стабільної та ефективної роботи транспорту значною мірою залежить добробут населення, розвиток національної економіки та безпека держави.

Транспорт – це галузь матеріального виробництва, що здійснює перевезення людей та вантажів. Транспорт належить до галузі виробництва матеріальних послуг.

Транспортна послуга – це не лише перевезення вантажів і пасажирів, а й будь-яка операція, що не входить до складу процесу перевезення, але пов'язана з ним.

Розвиток ринкової економіки сприяє підвищенню ролі транспорту в системі товароруку, зростанню питомої ваги транспортних послуг. В організації послуг транспорту виділяють два напрями:

- пристосування асортименту послуг, що пропонуються відповідно до специфічних вимог клієнтів;
- активне формування потреби та попиту з метою найбільш прибуткової реалізації транспортних послуг.

Предметом логістики на автомобільному транспорті є сукупність задач, пов'язаних з оптимізацією потокових процесів.

До основних завдань логістики на автомобільному транспорті:

- створення транспортних систем, в загальні і особисто автомобільних транспортних систем, у тому числі транспортних коридорів і транспортних ланцюгів;
- забезпечення технічної й технологічної поєднаності учасників транспортного процесу, узгодженість їх економічних інтересів;
- сумісне планування та узгодження автомобільних транспортних процесів з різними видами транспорту (при змішаних перевезеннях);
- забезпечення технологічної єдності транспортно-складського процесу;
- сумісне планування виробничого, транспортного та складського процесу;
- вибір виду і типу транспортного засобу;
- вибір раціональних маршрутів доставки вантажів і пасажирів;
- розподіл рухомого складу за маршрутами та поїздками, його оптимізація;
- вибір перевізника (перевізників) і логістичних партнерів (експедиторів, агентів, брокерів та ін.) у транспортуванні;
- вибір раціональної системи фізичного супроводження та контролю місцезнаходження транспортного засобу і вантажу;
- планування собівартості перевезень та розрахунок тарифів;
- розподіл ризиків, прибутку та відповідальності між учасниками транспортного процесу;
- планування потреби в матеріальних ресурсах для забезпечення експлуатації, технічного обслуговування (ТО) та ремонту (Р) рухомого складу та транспортної інфраструктури;

- оперативне планування та диспетчерське управління ТО і Р рухомого складу;
- планування та впровадження інвестицій у виробничо-технічну базу транспорту;
- визначення транспортних умов базисів поставок;
- впровадження новітніх технологій автомобільних перевезень вантажів і пасажирів;
- вибір інформаційно-комп'ютерних систем на автомобільного транспорту.

Для розв'язання зазначених завдань у логістиці автомобільного транспорту застосовуються такі методи і моделі:

- моделі вибору перевізника;
- маршрутизація перевезень (транспортна задача);
- модель "точно своєчасно";
- економіко-математична модель макрологістичної системи (виробничо-транспортна задача);
- моделі "виробництво-транспорт-споживання" та ін.

Логістичний підхід до управління матеріальними потоками на автомобільному транспорті передбачає інтеграцію учасників логістичного процесу до єдиної системи.

Зазначені питання висвітлюються при викладанні дисципліни "Логістика на автомобільному транспорті" студентам напряму підготовки 274 – "Автомобільний транспорт"

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Лабораторні заняття з дисципліни "Логістика на автомобільному транспорті" є обов'язковим для студентів IV курсу напряму підготовки – 274 "Автомобільний транспорт" денної та заочної форми навчання.

Метою лабораторного практикуму є засвоєння основних логістичних понять розподілів і характеристик матеріалопотоків, характеристик транспортних потоків, методів оптимізації і прогнозування, а також набуття навичок роботи з пакетами прикладних комп'ютерних програм, зокрема MathCad, під час моделювання, визначення прогнозних характеристик, проведення обчислень відповідно до завдань та аналізу отриманих результатів.

Кожна робота має тему, конкретну мету та певні теоретичні відомості. Теорію до лабораторної роботи необхідно самостійно опрацювати і відповісти на контрольні запитання. На заняттях в комп'ютерному класі бажано виконати всі процедури зазначені в основних завданнях і намагатися захистити лабораторну роботу. Базу даних для розрахунку студенти формують за таблицями, поданими в кожній лабораторній роботі, згідно завдань і свого варіанту.

В основних завданнях, викладених після теоретичних відомостей, зазначено, які таблиці використовуються в лабораторній роботі, а варіанти, за якими вибираються дані, наведені в кожній таблиці.

Зауважимо, що номер варіанту по кожній лабораторній студент узгоджує з викладачем.

По кожній лабораторній роботі складається звіт, в якому подається номер лабораторної роботи, тема, мета, вибрана база дана, різні форми виконання завдань (як правило, це графічний і табличний), а також аналіз отриманих результатів та висновки.

Форма звіту і характер виконання лабораторної роботи проілюстровано після наведеного комплексу завдань.

Якщо лабораторна робота виконана і підготовлено звіт, то її слід захистити. На захисті викладач задає запитання з теорії, процесу виконання лабораторної роботи на ПЕОМ, розглядається сутність використаних понять та видів моделей та методи оптимізації і прогнозу матеріалопотоків, характеристик транспортного процесу, їх розв'язку та аналізу.

Типові контрольні запитання розміщені в кінці кожної лабораторної роботи. Тут наведено і посилання на літературні джерела, що використовуються в даній лабораторній роботі. Все це необхідно для самостійного опрацювання.

Якщо лабораторна робота студентом захищена, викладач відмічає дату її здачі, ставить оцінку і свій підпис на звіті. Фіксується здача лабораторної роботи і в лабораторному журналі.

Для ефективною роботи в комп'ютерному класі, збереження набраної інформації та організація самостійної роботи кожний студент повинен обов'язково зареєструватися в модульному середовищі університету, мати свій

профіль доступу (логін, пароль) і необхідний обсяг пам'яті в сервері. В лабораторній роботі на комп'ютері кожен студент працює під своїм профілем. Бажано щоб кожен студент мав своє робоче місце.

Процес виконання лабораторної роботи, розрахунки і аналіз та виконання повинні зберігатися до кінця семестру й одержання заліку з дисципліни. Слід пам'ятати, що необхідний обсяг робіт, повинен проробити кожен студент і здати викладачу збірку звітів з цих лабораторних робіт під час одержання заліку.

В комп'ютерному класі проводяться консультації і є графік додаткових занять, на яких студенти відробляють пропущені заняття, або виконують завдання, що не встигли зробити на основному занятті.

2. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторна робота №1

Тема: ОПТИМІЗАЦІЯ ВАНТАЖОПОТОКІВ.

Мета – методами математичного програмування знайти оптимальний варіант розв'язання транспортної задачі.

Короткі теоретичні відомості

Основою логістики автомобільного транспорту є транспортна задача, розв'язання якої базується на методах математичного програмування. В найпростішому випадку – лінійного програмування. Сутність транспортної задачі полягає в наступному.

Задана множина постачальників (пункти навантаження) і споживачів (пункти розвантаження) однорідних (взаємозамінних) вантажів, що є у постачальників, і ті, обсяги поставок, що вимагають споживачі. Необхідно визначити план перевезень вантажів від постачальників до споживачів, що забезпечує додержання обмежень на поставку і потребу у вантажі, а також мінімальні транспортні затрати.

Для спрощення розв'язку в якості критерію оптимальності приймають пробіг рухомого складу (відстань), що визначає транспортні затрати й вантажообіг в тонно-кілометрах.

Розглянемо більш спрощену постановку задачі: нехай кожен з A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) постачальників має відповідно a_i тон одного виду вантажу. Вантаж необхідно завезти кожному споживачу B_j ($j = 1, 2, \dots, n$) в кількості b_j тон. Відома також відстань l_{ij} від i -го постачальника до j -го споживача.

Позначимо кількість тон вантажу, що перевозиться від i -го постачальника j -му споживачу, через x_{ij} . Задача полягає у визначенні таких обсягів перевезень x_{ij} , при яких сумарна транспортна робота буде мінімальною.

Оскільки перевезення планується у відповідності з потребами вантажеотримувачів, то виконується умова:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (1.1)$$

тобто загальна кількість вантажів у постачальників дорівнює загальному обсягу заводу всім вантажеотримувачам.

Обсяг поставок і потреб характеризується матрицею перевезень з розмірами $m \times n$ (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Транспортна матриця вивезення від постачальників та завезення споживачам вантажів

Споживач	Постачальник				Завезення (потреба)
	A_1	A_2	...	A_m	
B_1	x_{11}	x_{21}	...	x_{m1}	b_1
B_2	x_{12}	x_{22}	...	x_{m2}	b_2
...
B_n	x_{1n}	x_{2n}	...	x_{mn}	b_n
Вивезення (запаси)	a_1	a_2	...	a_m	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Вантажообіг в тонно-кілометрах по доставці x_{ij} тон вантажу від i -го вантажовідправника j -му вантажоотримувачу дорівнює $x_{ij}l_{ij}$.

Сумарний вантажообіг складе:

$$W = x_{11}l_{11} + x_{12}l_{12} + \dots + x_{1n}l_{1n} + x_{21}l_{21} + x_{22}l_{22} + \dots + x_{2n}l_{2n} + \dots + x_{m1}l_{m1} + x_{m2}l_{m2} + \dots + x_{mn}l_{mn} \quad (1.2)$$

Процес вивезення вантажу від першого вантажовідправника повинен задовольняти умові:

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 \quad (1.3)$$

Аналогічно для другого вантажовідправника:

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2 \quad (1.4)$$

На розмір завезення вантажу споживачу накладаються такі обмеження:

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 \quad (1.5)$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2 \quad (1.6)$$

Математична модель в загальному випадку матиме вигляд:

$$\text{цільова функція} - W = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}l_{ij} \quad (1.7)$$

$$\text{система обмежень} - \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.9)$$

Окрім цього умова невід'ємності $x_{ij} \geq 0$ задовольняє обмеженням (1.8-1.9), а цільова функція (1.7) досягне мінімуму.

Цільову функцію можна подати і через вартість $c_{ij}x_{ij}$ перевезень обсягу x_{ij} вантажу:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min, \quad (1.10)$$

де c_{ij} – вартість перевезення однієї тони вантажу від i -го вантажовідправника j -му вантажоотримачу.

В математичному програмуванні найбільш поширені наступні методи початкових опорних розв'язків транспортної задачі матрицею перевезень (1.1):

- діагональний метод;
- метод найменшої вартості (вантажопотоку);
- метод усереднених коефіцієнтів.

Сутність діагонального методу полягає в тому, щоб послідовно, починаючи з клітини B_1A_1 (табл. 1.1), максимально задовільняються потреби споживачів, використовуючи можливості постачальників. Остаточний варіант опорного плану задачі подається таблицею.

Метод найменшої вартості (вантажопотоку) відрізняється від діагонального методу тільки послідовністю заповнення клітинок. Починають заповнювати ті клітинки таблиці, де вартість перевезення (вантажопотік) становить на даному етапі мінімальною. Остаточний варіант опорного плану задачі також подається таблицею.

Метод усереднених коефіцієнтів полягає в обчисленні середніх собівартостей перевезення або відстаней від i -го постачальника до j -го споживача:

$$c_{Bi} = (c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in}) / n; \quad c_{Aj} = (c_{1j} + c_{2j} + \dots + c_{mj}) / m, \quad (1.11)$$

де c_{Bi} – усереднене значення собівартості перевезення i -го зразка; c_{Aj} – j -го стовпчика.

Після цього усереднені коефіцієнти k_{ij} розраховують за виразом:

$$k_{ij} = c_{ij} - (c_{Bi} + c_{Aj}). \quad (1.12)$$

Потім заповнюються послідовно клітинки, починаючи з кліток з найменшими значеннями коефіцієнтів k_{ij} , добудовуємо рядок і стовпчик в матриці перевезень, куди заносимо середні вартості рядків і стовпчиків c_{Bi} і c_{Aj} . Коефіцієнти k_{ij} помістимо в правий верхній кут відповідних клітинок і отримують нову матрицю перевезень.

Оцінки зазначених методів свідчать, що найоптимальнішим буде початковий опорний план знайдений методом осереднених коефіцієнтів. Більш точну перевірку плану на оптимальність можна здійснити методом потенціалів на ПЕОМ або традиційним методом.

Розглянута задача є транспортною задачею лінійного програмування, а її модель закритого типу, оскільки використана умова (1.1).

На практиці можливі випадки, коли пропозиція перевищує попит $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i$, тобто вся потреба може бути задовільнена, але при цьому ресурси не вичерпуються і, навпаки, попит перевищує пропозицію $\sum_{j=1}^n b_j < \sum_{i=1}^m a_i$, тобто всі наявні ресурси вичерпані, але потреба залишається.

Моделі з незбалансованим попитом і пропозицією називаються відкритими. У випадку, коли пропозиція перевищує попит, в модель вводиться фіктивний (умовний) споживач з обсягом споживання:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j. \quad (1.13)$$

Затрати на доставку одиниці продукції з пункту відправлення до фіктивного пункту споживання повинні бути обов'язково рівні між собою, і їх приймають рівними нулю:

$$c_{1,n+1} = c_{2,n+1} = \dots = c_{m,n+1} = 0.$$

Якщо ж попит перевищує пропозицію, то вводиться фіктивний пункт відправлення з обсягом поставки:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i. \quad (1.14)$$

Затрати на доставку одиниці продукції з фіктивного пункту відправлення до кожного пункту споживача повинні бути обов'язково рівними між собою, і їх приймають рівними нулю:

$$c_{m+1,1} = c_{m+1,2} = \dots = c_{m+1,n} = 0.$$

Це також дозволяє використати для розв'язання задачі методи, розроблені для закритої моделі. В якості відстаней $l_{i(n+1)}$ та $l_{(m+1)j}$ приймається будь яке, однакове для всіх i або j додатне число. Маємо справу з моделлю лінійного програмування.

В задачах лінійного програмування ітераційний процес по відшуканню оптимального плану починають з побудови опорного плану. Бажано, щоб він, по можливості, був найбільш наближеним до оптимального.

Одним з простих методів знаходження опорного плану є послідовне закріплення споживачів за кожним постачальником, починаючи з постачальника A_1 (метод мінімального елемента стовпця матриці). Вибирають найкоротшу відстань та задовільняють по можливості потребу споживачів щодо вантажу.

Невироджений опорний план транспортної задачі містить $m+n-1$ додатних елементів (перевезень); клітинки, в яких знаходяться відмінні від нуля перевезення називаються **зайнятими**, решта – **незайнятими**.

Опорний план повинен відповідати умові циклічності. Це означає, що в таблиці (матриці) 1.1 не можна побудувати замкнений цикл, всі вершини якого лежать в зайнятих клітинах. Побудова циклу для будь-якої завантаженої клітинки являє собою перехід по рядку (стовпцю) до другої зайнятої клітинки, в якій роблять поворот під прямим кутом (вершина циклу) й рухаються по стовпцю (рядку) до наступної зайнятої клітини і т.д. (тобто, ходом ладді в шахах). Намагаючись повернутися до початкової клітини. Якщо повернення можливе, то отримують цикл, і такий план не може бути опорним.

Можна показати, що не може бути опорним будь-який план, що більше $m+n-1$ зайнятих клітинок. В цьому випадку завжди можна знайти цикл,

переміщуючи завантаження таким чином, щоб одна з вершин циклу була незавантаженою, що зменшує число зайнятих клітинок до $m+n-1$.

Основні завдання

1. Ознайомитись з транспортною задачею.
2. Розглянути зміст та алгоритм розв'язку транспортної задачі методом потенціалів.
3. За своїм варіантом сформулювати цільову функцію за виразом (1.7) і даних таблиці 1.2 та ввести її в ЕОМ.
4. Ввести також початкові умови:

$$x_{11} := 0, x_{12} := 0, \dots, x_{mn} := 0.$$

5. За допомогою функції Mathcad *Given* ввести систему обмежень (1.8) та (1.9).
6. Ввести граничні умови:

$$x_{11} \geq 0 \dots x_{mn} \geq 0.$$

7. Використовуючи функцію *Minimize* знайти оптимальне рішення, ввівши:

$$Opt := \text{Minimize}(w, x_{11} \dots x_{mn}).$$

8. Вивести на екран оптимальний план:

$$Opt =$$

9. Знайти значення цільової функції і за оптимальним планом перевезень.
10. Проаналізувати отримані результати і зробити висновки.

Варіанти завдань

Таблиця 1.2 – Обсяг перевезень, тис. т

№ вар.	Запаси a_i по-стачальників, Т			Потреби b_i споживачів, Т					Відстані b_{ij} між пунктами постачальників і споживачів, км														
	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	A_2					A_3									
									B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5					
1	20	15	25	10	15	5	20	10	5	10	8	12	20	5	10	15	17	20	20	10	15	13	7
2	25	15	15	5	20	15	10	5	11	7	12	14	10	7	10	13	16	19	7	12	19	14	10
3	30	20	10	20	5	15	10	10	7	10	5	8	4	3	7	11	15	19	7	5	8	9	10
4	35	30	5	25	15	5	15	10	9	11	7	3	5	4	6	8	10	12	7	7	6	5	4
5	20	10	25	10	10	10	10	15	5	7	11	3	9	6	4	8	12	10	8	7	6	4	3
6	40	20	20	15	25	5	15	20	10	7	13	17	8	10	14	16	12	8	8	7	5	10	13
7	25	25	25	15	10	20	20	10	6	3	4	7	5	6	7	10	9	8	10	20	12	7	5
8	15	15	15	10	5	15	10	5	5	5	7	9	11	3	7	5	6	4	13	10	7	5	3
9	20	20	20	20	5	5	5	25	7	5	9	11	13	9	6	7	8	5	5	5	7	11	9
10	30	30	35	15	15	25	20	20	8	5	7	11	12	4	9	8	5	4	4	5	10	12	9
11	15	20	25	10	20	5	10	15	10	3	5	9	13	9	7	9	7	5	5	7	8	12	10
12	35	25	15	5	20	15	20	15	4	11	9	7	5	7	6	5	8	5	8	10	13	20	15
13	15	25	15	10	5	20	10	10	9	8	7	5	11	11	11	6	5	4	8	8	15	16	7
14	20	30	10	5	15	10	15	15	10	6	9	7	4	12	13	14	17	8	5	8	11	14	17
15	10	20	30	15	15	15	10	5	3	7	5	6	9	9	17	20	4	7	7	7	8	10	12
16	25	10	40	20	10	20	10	15	8	8	11	9	7	20	17	17	9	8	12	10	15	17	20
17	30	30	30	15	35	10	15	15	3	5	7	8	10	15	15	9	7	8	20	10	5	18	3
18	35	15	20	5	15	20	15	15	5	3	6	9	7	7	6	8	5	7	3	7	11	15	18
19	40	20	20	20	10	10	20	20	5	5	9	7	6	8	8	7	6	5	5	7	8	10	20
20	25	25	35	15	15	25	5	25	3	3	9	5	4	7	7	8	5	3	7	4	10	15	13
21	45	25	10	10	15	15	20	20	4	3	5	6	7	6	4	6	5	3	7	5	10	13	17
22	25	15	35	15	5	20	15	20	3	4	7	6	5	9	6	4	3	3	3	4	6	8	10
23	10	25	40	5	10	5	35	20	7	6	4	3	5	10	11	10	12	17	5	7	6	9	9
24	35	35	35	15	25	25	30	10	10	11	4	8	5	6	7	7	5	4	10	10	7	9	8
25	10	15	35	10	15	15	10	10	12	10	8	6	5	8	9	12	10	4	13	15	7	17	5

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №1

Тема: Оптимізація вантажопотоків.

Виконав ст.гр.

Варіант №

Цільова функція:

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}) := 12 \cdot x_{11} + 10 \cdot x_{12} + 8 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{15} + 8 \cdot x_{21} + 9 \cdot x_{22} + 12 \cdot x_{23} + 10 \cdot x_{24} + 4 \cdot x_{25} + 13 \cdot x_{31} + 17 \cdot x_{32} + 7 \cdot x_{33} + 17 \cdot x_{34} + 5 \cdot x_{35}$$

Початкові умови:

$$x_{11} := 0 \quad x_{21} := 0 \quad x_{31} := 0$$

$$x_{12} := 0 \quad x_{22} := 0 \quad x_{32} := 0$$

$$x_{13} := 0 \quad x_{23} := 0 \quad x_{33} := 0$$

$$x_{14} := 0 \quad x_{24} := 0 \quad x_{34} := 0$$

$$x_{15} := 0 \quad x_{25} := 0 \quad x_{35} := 0$$

Система обмежень, за допомогою знаку "жирне дорівнює" (Булева рівність):

Given

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 10$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 15$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 35$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 15$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 10$$

Граничні умови:

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{21} \geq 0 \quad x_{31} \geq 0$$

$$x_{12} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0 \quad x_{32} \geq 0$$

$$x_{13} \geq 0 \quad x_{23} \geq 0 \quad x_{33} \geq 0$$

$$x_{14} \geq 0 \quad x_{24} \geq 0 \quad x_{34} \geq 0$$

$$x_{15} \geq 0 \quad x_{25} \geq 0 \quad x_{35} \geq 0$$

Оптимальний розв'язок, за допомогою функції Minimize

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{25} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{pmatrix} := \text{Minimize}(f, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35})$$

x11	0
x12	10
x13	0
x14	0
x15	0
x21	$1.776 \cdot 10^{-15}$
x22	5
x23	0
x24	10
x25	0
x31	10
x32	0
x33	15
x34	0
x35	10

Значення цільової функції:

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}) = 530$$

Оптимальним варіантом розв'язання задачі є:

$$x_{12} = A1 \rightarrow B2 = 10$$

$$x_{22} = A2 \rightarrow B2 = 5$$

$$x_{24} = A2 \rightarrow B4 = 10$$

$$x_{31} = A3 \rightarrow B1 = 10$$

$$x_{33} = A3 \rightarrow B3 = 15$$

$$x_{35} = A3 \rightarrow B5 = 10$$

Лабораторна робота №1

Тема: Оптимізація вантажопотоків.

Виконав ст.гр.

Варіант №

Початкові дані:

$$a := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Перевірка загального обсягу перевезень:

$$\sum a = 60 \quad \sum b = 60$$

Визначення кількості рядків

$$M := \text{rows}(a) \quad N := \text{rows}(b)$$

$$M = 3 \quad N = 5$$

Матриця відстаней доставки між пунктами постачальників і споживачів:

$$L := \begin{pmatrix} 12 & 10 & 8 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & 12 & 10 & 4 \\ 13 & 15 & 7 & 17 & 5 \end{pmatrix}$$

Цільова функція:

$$F(x) := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (L_{i,j} \cdot x_{i,j})$$

$$x_{M-1, N-1} := 0$$

Система обмежень, за допомогою знаку "жирне дорівнює" (Булева рівність):

Given

$$x_{0,0} + x_{0,1} + x_{0,2} + x_{0,3} + x_{0,4} = 10$$

$$x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 15$$

$$x_{2,0} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 35$$

$$x_{0,0} + x_{1,0} + x_{2,0} = 10$$

$$x_{0,1} + x_{1,1} + x_{2,1} = 15$$

$$x_{0,2} + x_{1,2} + x_{2,2} = 15$$

$$x_{0,3} + x_{1,3} + x_{2,3} = 10$$

$$x_{0,4} + x_{1,4} + x_{2,4} = 10$$

Граничні умови:

$$x_{0,0} \geq 0 \quad x_{1,0} \geq 0 \quad x_{2,0} \geq 0$$

$$x_{0,1} \geq 0 \quad x_{1,1} \geq 0 \quad x_{2,1} \geq 0$$

$$x_{0,2} \geq 0 \quad x_{1,2} \geq 0 \quad x_{2,2} \geq 0$$

$$x_{0,3} \geq 0 \quad x_{1,3} \geq 0 \quad x_{2,3} \geq 0$$

$$x_{0,4} \geq 0 \quad x_{1,4} \geq 0 \quad x_{2,4} \geq 0$$

Оптимальний розв'язок, за допомогою функції Minimize

Opt := Minimize(F, x)

$$\text{Opt} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1.776 \times 10^{-15} & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 15 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Значення цільової функції:

$$F(\text{Opt}) = 530$$

Оптимальним варіантом розв'язання задачі є:

$$x_{0,1} = A1 \rightarrow B2 = 10$$

$$x_{1,1} = A2 \rightarrow B2 = 5$$

$$x_{1,2} = A2 \rightarrow B4 = 10$$

$$x_{2,0} = A3 \rightarrow B1 = 10$$

$$x_{2,2} = A3 \rightarrow B3 = 15$$

$$x_{2,4} = A3 \rightarrow B5 = 10$$

Контрольні запитання

1. У чому полягає зміст транспортної задачі?
2. Що являє собою транспортна матриця?
3. Який вигляд має математична модель транспортної задачі?
4. Чим відрізняється відкриті й закриті моделі транспортного перевезення вантажів?
5. Що таке математичне програмування, які його методи?
6. Які існують традиційні методи розв'язання транспортної задачі?
7. У чому полягає зміст методу потенціалів?
8. За допомогою яких функцій Mathcad можна розв'язати поставлену транспорту задачу?
9. Що таке оптимальне рішення і оптимальний план транспортних перевезень?

Література: [1, 5-9, 11-18].

Лабораторна робота №2

Тема: ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРТІЇ ВАНТАЖУ.

Мета роботи – Визначення оптимальної партії вантажу.

Короткі теоретичні відомості

Відомо, що процес виробництва безпосередньо пов'язаний із створенням запасів матеріалів, напівфабрикатів і готових виробів.

Причиною створення запасів є також необхідність гарантованого безперебійного постачання споживачів продукцією, а тому їх запаси створюються не тільки на складах споживачів, але й на проміжних складах постачально-збутових організацій. Утворення запасів пояснюється й дискретним характером транспортного процесу на всіх видах транспорту, в тому числі й автомобільному.

Задачі визначення раціонального розміру запасів та оптимальної партії перевезення вантажу необхідні для нормального функціонування автотранспортного підприємства (АТП).

Збитки економіці приносять як надлишкові, так і недостатні запаси. Надлишкові запаси приводять до "омертвіння" засобів, витрачених на придбання й збереження невикористаних запасів. Окрім цього в процесі збереження якість деяких товарів погіршується й виникають втрати. Великі запаси доцільно утворювати для продуктів сезонного виробництва (наприклад, сільськогосподарська продукція) або постійного виробництва, але сезонного споживання (паливо). Недостатні запаси можуть стати причиною порушення виробничого процесу або ритмічного постачання.

Задачі управління запасами полягають у виборі обсягу і моменту замовлення на постачання, що забезпечує мінімальні сумарні затрати на збереження, штрафи і поставки.

Сукупність правил, якими керуються при прийнятті рішень називається стратегією управління запасами. Стратегія, що мінімізує сумарні затрати вважається оптимальною, визначення її є предметом теорії оптимального управління запасами.

Задачі управління запасами поділяються на статичні і динамічні. В статичних задачах утворення запасу виступає як одиничний акт, а в динамічних витрата й періодичне поповнення запасів розглядається як процес, що розгортається в часі. Для різних умов динамічні управління запасами мають різні формування, але їх математичні моделі аналогічні.

Розглянемо найпростішу модель управління запасами – систему з фіксованим обсягом замовлень P . В такій системі розмір замовлень є величиною сталою і повторні замовлення подаються при зменшенні наявних запасів до певного критичного рівня (точка замовлення).

Якщо q – розмір партії, t_q – інтервал часу між черговими поставками, P – потреба споживача в певній продукції на весь планований період T , тоді число партій за цей час дорівнює $\frac{P}{q}$, а

$$t_q = \frac{T \cdot q}{P}. \quad (2.1)$$

Якщо інтервал t_q починається в момент, коли на складі є q тон продукції, і закінчується, при відсутності запасів, то величина середнього запасу складає $\frac{q}{2}$.

Нехай необхідно перевезти з пункту відправлення A в пункт доставки B за певний період часу P тон вантажу. Процес перевезення вантажу пов'язаний з певними затратами. Всі затрати під час транспортування поділяються на дві групи: затрати виконання замовлення та затрати, пов'язані із зберіганням запасів вантажу.

Затрати на виконання замовлення – це затрати, пов'язані з організацією доставки нової партії. Будемо вважати, що вони не залежать від розміру партії. Затрати виконання замовлень за будь-який період часу складають:

$$S_1 = \frac{P \cdot C_1}{q}, \quad (2.2)$$

де C_1 – затрати на виконання замовлення по доставці однієї партії вантажу, грн; P – кількість вантажу, яку потрібно перевезти за певний проміжок часу, т; q – партія вантажу, т.

Затрати S_2 пов'язані із зберіганням запасів, що включають затрати на утримання продукції на складі, та можливі втрати внаслідок затримання оборотності засобів:

$$S_2 = \frac{C_2 \cdot q}{2}. \quad (2.3)$$

Розмір цього виду затрат передусім визначається вартістю одиниці зберігання продукції C_2 , грн/т, а також розміром партії q , т.

При збільшенні розміру замовлення ці витрати лінійно збільшуються.

Сумарні затрати за певний проміжок часу визначаються залежністю:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P \cdot C_1}{q} + \frac{C_2 \cdot q}{2}. \quad (2.4)$$

Отже в задачі визначення оптимальної партії вантажу є два фактори, які діють в протилежних напрямках, і визначають оптимальний розмір партії вантажу.

Оптимальний розмір партії визначається з умови, що сумарні затрати на перевезення і зберігання вантажу повинні бути мінімізованими:

$$S(q) \Rightarrow \min; q = q_{opt}. \quad (2.5)$$

Розв'язуючи задачу (2.5), тобто рівняння $\frac{dS}{dq} = 0$, можна отримати вираз

для оптимального розміру партії вантажу:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot C_1}{C_2}}. \quad (2.6)$$

Якщо задано попит на продукцію в одиницю часу r :

$$r = \frac{P}{T}; \quad (2.7)$$

і вартість збереження одиниці продукції:

$$C_2' = \frac{C_2}{T}, \quad (2.8)$$

то вираз для оптимального розміру партії вантажу матиме вигляд:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot C_1}{C_2'}}. \quad (2.9)$$

Вирази (2.6) і (2.9) називаються формулами Уілсона.

Основні завдання

1. Сформувати базу даних для свого варіанту, використавши таблицю 2.1.
2. За виразом (2.1) розрахувати інтервал часу між черговими поставками, а за виразом (2.7) попит на продукцію в одиницю часу.
3. Побудувати на одній координатній площині графіки $S_1(q)$, $S_2(q)$ і $S_3(q)$. По осі x – відкласти величину партії вантажу, а по осі y – відповідні затрати. За графіками визначити величину оптимальної партії перевезення вантажу.
4. Знайти величину оптимальної партії перевезення вантажу аналітичним методом, розв'язавши рівняння $\frac{dS}{dq} = 0$.
5. За допомогою системи Mathcad знайти величину партії вантажу символьним методом.
6. Порівняти результати, отримані в пп. 3-5 і зробити висновки.
7. Розрахувати відповідні затрати при оптимальній партії перевезень.
8. Провести розрахунок величини оптимальної партії за виразами (2.6) та (2.9).
7. Зробити висновки за результатами обчислень.

Варіанти завдань

Таблиця 2.1 – Дані перевезень продукції АТП за певний проміжок часу

Варіант	P , тис.т	q , т	C_1 , тис. грн.	C_2 , тис. грн.	T , місяців
1	100	0...10	50	100	10
2	110	0...11	100	200	11
3	120	0...12	150	300	12
4	130	0...13	100	200	13
5	140	0...14	50	150	14
6	150	0...15	80	200	15
7	160	0...16	100	300	16
8	170	0...17	50	200	17
9	180	0...18	50	300	18
10	190	0...19	100	250	19
11	200	0...20	120	250	20
12	210	0...21	100	300	21
13	220	0...22	150	400	22
14	230	0...23	100	400	23
15	240	0...24	120	300	24
16	250	0...25	110	320	23
17	260	0...26	130	350	22
18	270	0...27	100	310	21
19	280	0...28	160	340	20
20	290	0...29	170	390	19
21	300	0...30	140	370	18
22	310	0...31	130	380	17
23	320	0...32	100	330	16
24	330	0...33	120	320	15
25	340	0...34	130	350	14

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №2

Тема: Оптимізація партії вантажу.

Виконав ст.гр.

Варіант №

База даних:

$$P := 340 \quad q := 1..34 \quad C_1 := 130 \quad C_2 := 350 \quad T := 14$$

Інтервал часу між черговими поставками:

$$t_q(q) := \frac{T \cdot q}{P}$$

Затрати виконання замовлень за будь-який період часу:

$$S_1(q) := \frac{P \cdot C_1}{q}$$

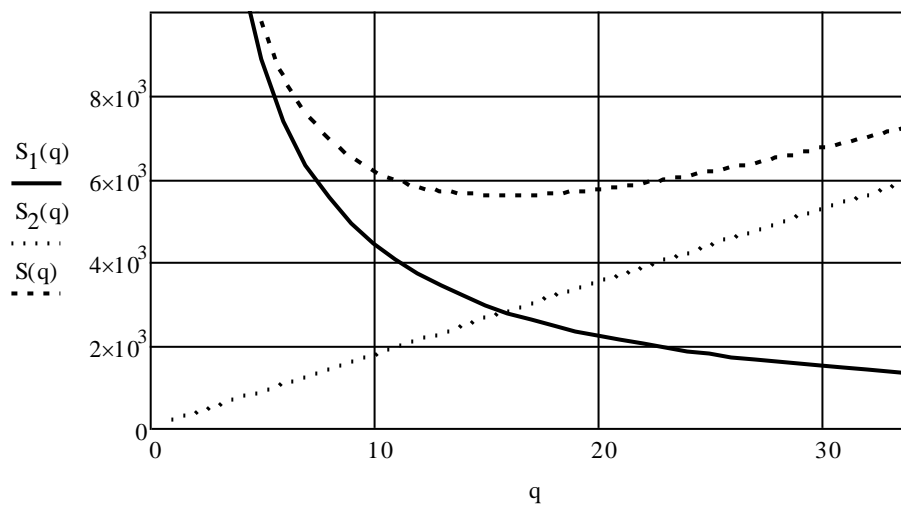
Затрати пов'язані із зберіганням запасів за певний період:

$$S_2(q) := \frac{C_2 \cdot q}{2}$$

Сумарні затрати за певний проміжок часу:

$$S(q) := S_1(q) + S_2(q)$$

$t_q(q) =$	$S_1(q) =$	$S_2(q) =$	$S(q) =$
0.041	$4.42 \cdot 10^4$	175	$4.438 \cdot 10^4$
0.082	$2.21 \cdot 10^4$	350	$2.245 \cdot 10^4$
0.124	$1.473 \cdot 10^4$	525	$1.526 \cdot 10^4$
0.165	$1.105 \cdot 10^4$	700	$1.175 \cdot 10^4$
0.206	$8.84 \cdot 10^3$	875	$9.715 \cdot 10^3$
0.247	$7.367 \cdot 10^3$	$1.05 \cdot 10^3$	$8.417 \cdot 10^3$
...



Використовуючи команду "Трассировка", визначаємо $q_{opt} = 15.89$

Число партій вантажу:

$$r := \frac{P}{T} \quad r = 24.286$$

Вартість збереження одиниці продукції:

$$C'_2 := \frac{C_2}{T} \quad C'_2 = 25$$

Оптимальний розмір партії вантажу:

$$q_{\text{opt}} := \sqrt{\frac{2 \cdot r \cdot C_1}{C'_2}} \quad q_{\text{opt}} = 15.892$$

Оптимальний розмір партії вантажу символьним методом

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{P \cdot C_1}{x} + \frac{C_2 \cdot x}{2} \right) \rightarrow 175 - \frac{44200}{x^2}$$

За допомогою знаку "жирне" дорівнює (Булева рівність)

$$\left(175 - \frac{44200}{x^2} \right) = 0$$

$$\left(175 - \frac{44200}{x^2} \right) \text{ solve, } x \rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{2 \cdot \sqrt{3094}}{7} \\ \frac{2 \cdot \sqrt{3094}}{7} \end{array} \right)$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{3094}}{7} = 15.892$$

Тобто $q_{\text{opt}} = 15.892$

Контрольні запитання

1. З'ясувати причини утворення запасів продукції при її постачанні споживачам.
2. До чого приводять надлишкові та недостатні запаси продукції на складах?
3. У чому полягають задачі управління запасами?
4. Які є види задач управління запасами?
5. Що собою являє найпростіша модель управління запасами?
6. Як визначити інтервал часу між черговими поставками?
7. Які є групи затрат під час транспортування вантажів?
8. Як розрахувати затрати на виконання замовлень, зберігання запасів і сумарні затрати за певний проміжок часу?
9. Що таке оптимальна партія перевезень вантажу?
10. Як визначити величину оптимальної партії перевезень на ЕОМ за допомогою системи Mathcad?
11. За якими виразами можна розрахувати величину оптимальної партії вантажу?

Література: [21-23, 25, 26, 30-32].

Лабораторна робота №3

Тема: ОПТИМІЗАЦІЯ ВЕЛИЧИНИ ЗАМОВЛЕННЯ ВАНТАЖУ.

Мета – розрахувати оптимальну величину замовлення з врахуванням змінної складової виконання замовлення.

Короткі теоретичні відомості

Вартість зберігання вантажів на складі крім безпосередніх витрат на зберігання вантажів враховує також "заморожування" капіталу, C_m , грн/т·добу:

$$C_m = \frac{C \cdot H_b}{100 \cdot 365}, \quad (3.1)$$

де C – вартість одиниці вантажу, грн/т; H_b – банківська ставка кредиту, % річних.

Клас вантажу і коефіцієнт використання вантажопідйомності автомобіля (γ) визначають по прейскуранту у відповідності до типів вантажу.

Середньодобова потреба у вантажі r , т/добу розраховується за виразом:

$$r = \frac{Q_p}{365 \cdot n}, \quad (3.2)$$

де Q_p – річний обсяг споживання продукції, тис. т.

Оптимальний розмір замовлення g_{opt} , т, без врахування транспортної складової витрат на виконання замовлення в першому наближенні дорівнює:

$$g_{opt} = \sqrt{\frac{C_3 \cdot r}{0,5 \cdot C_{xp}}}, \quad (3.3)$$

де C_3 – витрати виконання замовлення, грн/замовл., які складаються із постійної складової витрат виконання замовлення і витрат на доставку партії вантажу на склад автомобільним транспортом:

$$C_3 = C'_3 + 2L_\delta \cdot [a_{zm} + (a_{ткм} + b_{zm}) \cdot q_n] + T_{об} \cdot (a_{nocm} + b_{nocm} \cdot q_n), \quad (3.4)$$

де L_δ – відстань доставки партії вантажу, км; C'_3 – постійна складова витрат виконання замовлення, грн/замовл.; a_{zm} , a_{nocm} , $a_{ткм}$, b_{zm} , b_{nocm} – коефіцієнт регресійних моделей для розрахунку змінної і постійної складової собівартості вантажних автомобільних перевезень, що мають розмірність відповідно грн/км, грн/год, грн/т·км і грн/т·год; q_n – номінальна вантажопідйомність автомобіля (приймаємо, що q_n дорівнює максимальній вантажопідйомності $q_{max} = 10$ т); $T_{об}$ – час обороту автомобіля на маршруті, год.

Оптимальний розмір замовлення з врахуванням транспортної складової витрат на виконання замовлення розраховується за виразом:

$$g_{opt} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot r \cdot \left(C'_3 + 2 \cdot L_\delta \cdot \left(a_{zm} + \frac{a_{nocm}}{V_m} \right) + 2 \cdot a_{nocm} \cdot t_\delta \right)}{0,5 \cdot \gamma \cdot C_{зб} + r \cdot b_{nocm} \cdot \tau_{np}}}, \quad (3.5)$$

де τ_{np} – норма часу простою автомобіля під завантаженням і розвантаженням, год/т; t_δ – додатковий час на заїзд в один пункт на маршруті, год; V_m – технічна швидкість автомобіля, км/год.

При виконанні розрахунків в обох варіантах слід враховувати, що розмір замовлення (з врахуванням коефіцієнта використання вантажопідйомності) не може перевищувати максимальну вантажопідйомність автомобіля.

Основні завдання

1. Сформувати базу даних для свого варіанту, використавши таблиці 3.1-3.3.
2. Визначити вартість зберігання вантажів на складі.
3. Визначити клас вантажу і статистичний коефіцієнт використання вантажопідйомності автомобіля.
4. Розрахувати добову потребу у вантажі і вартість виконання замовлення.
5. Розрахувати оптимальні розміри замовлення в заданому діапазоні зміни відстані доставки – від 5 до 100 км (сім значень, включаючи граничні точки діапазону) для двох варіантів розрахунку – з врахуванням витрат на доставку партії вантажу і без неї.
6. Побудувати криву залежності оптимального розміру замовлення від відстані доставки для обох варіантів розрахунків.
7. За результатами обчислень зробити висновки.

Варіанти завдань

Таблиця 3.1 – Коефіцієнти регресійних моделей складових собівартості автомобільних перевезень

Складова собівартості перевезень	Коефіцієнт регресійної моделі	Тип кузова автомобіля	
		бортовий	фургон
Змінна, ($C_{зм}$)	$a_{зм}$, грн/км	0,050	0,175
	$b_{зм}$, грн/т·км	0,040	0,090
	$a_{ткм}$, грн/т·км	0,020	0,020
Стала, ($C_{пост}$)	$a_{пост}$, грн/год	0,100	0,200
	$b_{пост}$, грн/т·год	0,250	0,400
Пов'язана з пробігом, ($C_{км}$)	$a_{км}$, грн/км	0,054	0,183
	$b_{км}$, грн/т·км	0,050	0,126

Параметри регресійної моделі розраховані для значення технічної швидкості автомобіля $V_t = 25$ км/год.

Таблиця 3.2 – Види вантажів та їх вартість

Номер варіанту	Вид вантажу	Вартість одиниці вантажів (<i>L</i>), грн/т
1	Двигуни	8500
2	Акумулятори електричні	4000
3	Плити ж/б	1000
4	Фарби і лакофарбові вироби	7000
5	Електроди в упаковці	5500
6	Труби цементні	3000
7	Лінолеум	15000
8	Напої безалкогольні	1000
9	Шифер	5000
10	Плити газові	5000
11	Дошка брус	12000
12	Оргтехніка	25000
13	Цемент	800
14	Бензопили	30000
15	Сантехніка	50000
16	Джерела живлення	15000
17	Тротуарна плитка	5000
18	Цегла облицювальна	3000
19	Цегла біла силікатна	3500
20	Пісок	1000
21	Цегла червона	800
22	Мармур	7000
23	Ракушняк	1500
24	Чавунні батареї	2000
25	Письмовий стіл	9500

Таблиця 3.3 – Характеристика ринкових умов

№ варіанту	Показник							
	Постійна складова витрат виконання замовлення, C_3 , грн./замов.	Витрати зберігання вантажу на складі ($C_{зб}$), грн./г. добу	Річний об'єм споживання продукції (Q_p), тис.т.	Банківська ставка кредиту (H_6), % річних	Кількість споживачі (n)	Коефіцієнт використання вантажопідйомності автомобіля γ	Норма часу простою автомобіля під завантаження і розвантаженням $\tau_{пр}$, год/т	Додатковий час на заїзд в один пункт на маршруті t_0 , год
1	2,0	10,0	15	20	50	0,90	0,21	0,13
2	1,7	12,5	25	25	45	0,92	0,22	0,13
3	1,9	11,6	30	15	60	0,99	0,23	0,12
4	2,7	12,0	35	18	55	0,80	0,24	0,11
5	2,9	11,0	20	17	30	0,85	0,25	0,10
6	1,5	11,4	27	19	40	0,87	0,26	0,11
7	3,0	12,3	18	22	35	0,86	0,27	0,12
8	2,6	12,2	29	24	65	0,93	0,28	0,13
9	2,8	11,2	33	21	44	0,97	0,29	0,14
10	2,3	11,8	31	23	41	0,91	0,30	0,15
11	2,5	11,9	36	27	38	0,87	0,29	0,16
12	2,1	10,0	29	18	45	0,82	0,28	0,17
13	1,8	10,5	31	21	42	0,83	0,27	0,18
14	2,7	10,9	30	23	37	0,95	0,26	0,19
15	2,1	12,3	25	14	47	0,96	0,25	0,20
16	1,2	12,5	27	19	35	0,98	0,24	0,19
17	1,4	12,2	29	23	32	0,93	0,23	0,18
18	1,7	11,9	31	26	39	0,91	0,22	0,17
19	1,9	12,7	33	27	36	0,90	0,21	0,16
20	2,2	12,3	35	28	33	0,81	0,20	0,15
21	1,5	11,9	32	24	40	0,82	0,21	0,14
22	1,8	12,3	36	28	44	0,83	0,22	0,13
23	2,3	12,5	33	26	42	0,87	0,23	0,12
24	2,4	12,1	35	28	39	0,89	0,24	0,11
25	2,7	12,5	34	26	41	0,85	0,25	0,10

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №3

Тема: Оптимізація величини замовлення вантажу.

Виконав ст.гр.

Варіант №

Початкові дані:

$$C := 9500 \quad H_b := 26 \quad Q_p := 34 \quad n := 41 \quad C'_z := 2.7 \quad L_d := 5, 10, \dots, 100 \quad t_d := 0.1$$

$$\tau_{np} := 0.25 \quad a_{zmb} := 0.05 \quad a_{postb} := 0.1 \quad b_{postb} := 0.25 \quad V_m := 25 \quad C'_z := 2.7$$

$$\gamma := 0.85 \quad a_{zmf} := 0.175 \quad a_{postf} := 0.2 \quad b_{postf} := 0.4 \quad C_{zb} := 12.5$$

Вартість зберігання вантажів:

$$C_m := \frac{C \cdot H_b}{100 \cdot 365} \quad C_m = 6.767$$

Середньодобова потреба у вантажі:

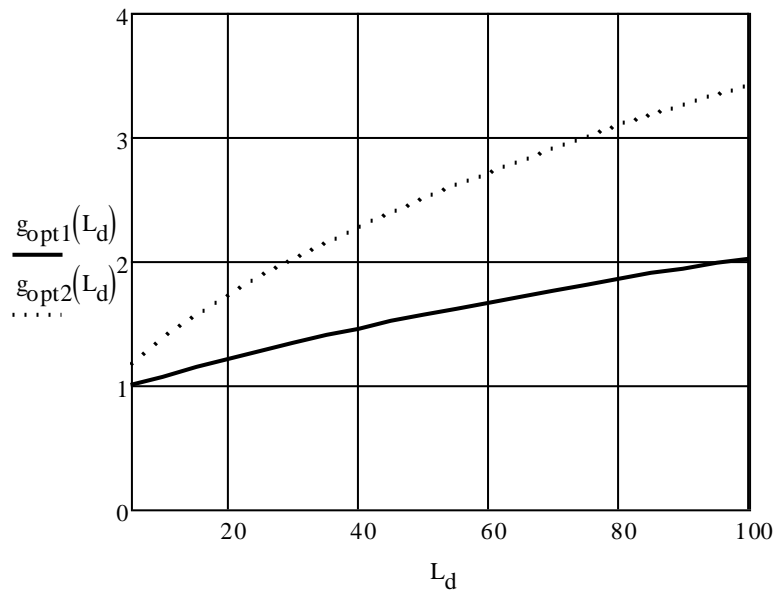
$$r := \frac{Q_p \cdot 10^3}{365 \cdot n} \quad r = 2.272$$

Оптимальний розмір замовлення в залежності від відстані доставки:

- бортовий тип кузова $\xi_{opt1}(L_d) := \frac{\gamma \cdot r \cdot \left[C'_z + 2 \cdot L_d \cdot \left(a_{zmb} + \frac{a_{postb}}{V_m} \right) + 2 \cdot a_{postb} \cdot t_d \right]}{0.5 C_{zb} + r \cdot b_{postb} \cdot \tau_{np}}$

- фургон $\xi_{opt2}(L_d) := \frac{\gamma \cdot r \cdot \left[C'_z + 2 \cdot L_d \cdot \left(a_{zmf} + \frac{a_{postf}}{V_m} \right) + 2 \cdot a_{postf} \cdot t_d \right]}{0.5 C_{zb} + r \cdot b_{postf} \cdot \tau_{np}}$

$\xi_{opt1}(L_d) =$	$\xi_{opt2}(L_d) =$
0.992	1.167
1.071	1.381
1.145	1.566
1.214	1.732
1.28	1.883
1.342	2.023
1.401	2.153
1.458	2.276
1.513	2.393
1.566	2.505
...	...



Можна бачити, що оптимальний розмір замовлення залежить, як від відстані доставки вантажу, так і типу кузова автомобіля, і для фургона більше ніж для бортового типу кузова

Контрольні запитання

1. З яких складових складаються витрати керування запасами вантажу на складах?
2. Що таке "оптимальний розмір замовлення"?
3. Назвіть основні особливості і припущення простої моделі керування запасами.
4. Чому проста модель керування запасами в найбільшому ступені знижує її універсальність і викривлює значення оптимального розміру замовлення?
5. Які основні системи керування запасами і дайте їх характеристику.
6. Які фактори враховані в моделі оптимального замовлення з врахуванням транспортної складової витрат?
7. Як визначаються витрати виконання замовлення на доставку партії вантажу на склад?

Література: [8, 19, 25-28].

Лабораторна робота №4

ТЕМА: ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛУ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ГРАФІВ.

Мета роботи – визначити маршрут з мінімальною вартістю перевезень та розподіл транспортного потоку для транспортної мережі.

Короткі теоретичні відомості

Для представлення різних технічних об'єктів, описи процесів і функціонування систем часто доцільно використовувати моделі графів. До моделі у вигляді графа можна звести багато практичних проблем і задач. Наприклад, пошук найкоротшого шляху в заданій транспортній системі, визначення маршруту з мінімальною вартістю, визначення оптимального розподілу потоку в мережі, сітьові моделі планування послідовності робіт та інші.

У задачах подібного типу потрібно знайти оптимальний варіант транспортування продукції по мережі певної конфігурації (ланцюга графа). В цьому випадку елементи мережі мають наступні характеристики: c_{ij} – вартість транспортування одиниці матеріалопотоку для ребра мережі між вершинами A_i та A_j , D_{ij} – пропускна здатність цього ребра, в загальному випадку обмежена в межах $0 < D_{ij} < \infty$. Якщо ребро між даними вершинами A_i і A_j графу відсутнє, то пропускна здатність рівна нулю, якщо потік нічим не обмежений – то нескінченності.

Для моделі графів виконується вимога збереження потоку: сумарний потік, що входить (додатній потік) і виходить (від'ємний потік) з вузла, повинні бути рівні.

Для проміжної вершини мережі можна записати:

$$\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0, \quad (4.1)$$

де k – перелік всіх ребер, що входять, j – що виходять для вершини i .

Для потоку в будь-якому ребрі необхідно, щоб:

$$0 \leq x_{ij} \leq D_{ij}. \quad (4.2)$$

Якщо A_1 – початкова вершина графа, то для неї, очевидно, необхідне виконання умови:

$$\sum_j x_{1j} = \Phi_{A_1}(x), \quad (4.3)$$

де Φ_{A_1} – максимальний вихідний потік, що створюється початковою вершиною мережі. Необхідно, щоб цей потік був менший, ніж сумарна пропускна здатність всіх ребер, що йдуть до кінцевої вершини, наприклад A_n :

$$\sum_k x_{kn} = \Phi_{A_n}(x), \quad (4.4)$$

де Φ_{A_n} – максимальний потік, споживаний кінцевою вершиною транспортної мережі, він також не повинен перевищувати пропускну здатності вхідних ребер.

Розглянемо дві постановки задач оптимізації в транспортних системах: визначення маршруту з мінімальною вартістю перевезень і максимізації транспортного потоку. Відповідно маємо два формулювання математичної моделі.

1. Визначення маршруту з мінімальною вартістю перевезень.

Цільова функція:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (4.5)$$

де c_{ij} – вартість транспортування одиниці матеріалопотоку.

Системою обмеження:

$$F_{A_i}(x) = F_{B_n}(x), \quad (4.6)$$

тобто потік не може накопичуватися в проміжних вершинах графа:

$$\sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn}. \quad (4.7)$$

Умова збереження безперервності транспортного потоку:

$$\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0. \quad (4.8)$$

Якщо параметри (змінні) повинні мати тільки цілі значення, то для їх знаходження необхідно застосувати методи розв'язання задач цілочисельного програмування.

Їх можна реалізувати за допомогою табличного процесора Excel. Разом з тим їх можна розв'язати системі Mathcad, якщо шукані змінні можуть приймати не будь-які значення, а лише значення 0 – відповідь "ні" і 1 – відповідь "так". Такі змінні називаються логічними або булевими.

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо рішення слід прийняти;} \\ 0, & \text{якщо рішення недоцільне.} \end{cases} \quad (4.9)$$

2. Максимізація транспортного потоку.

Максимізована цільова функція – сумарний потік, що входить в кінцевий вузол:

$$\Phi(x) = \sum_k x_{kn}, \quad (4.10)$$

Де системою обмежень постановки задачі є сумарні витрати, які не повинні перевищити величини наявних засобів C_s :

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \leq C_s. \quad (4.11)$$

Умова збереження безперервності транспортного потоку:

$$\Phi_{A_i}(x) = \Phi_{A_n}(x). \quad (4.12)$$

Крім цього враховується умова (4.2).

Пошук максимального потоку для транспортної системи в даній роботі здійснюється за графом транспортної мережі (рис. 4.1).

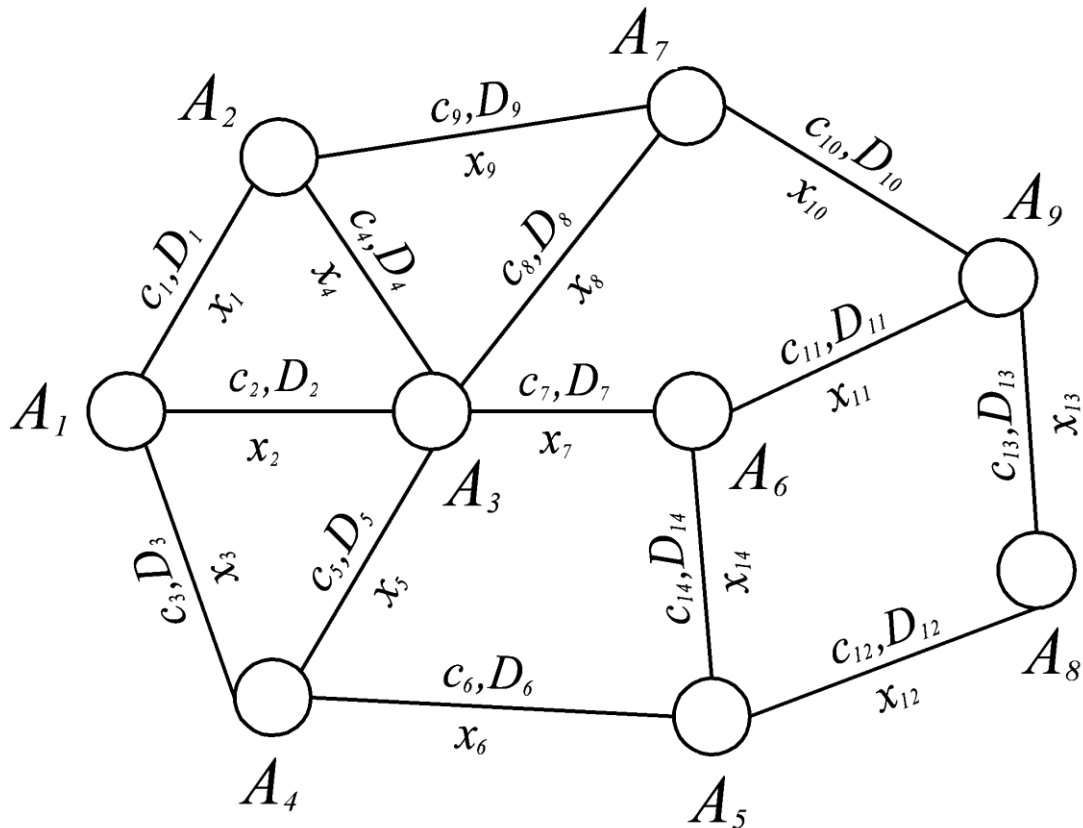


Рис. 4.1 – Граф транспортної мережі.

Граф транспортної мережі має вершини A_1, \dots, A_9 , які сполучаються ребрами. Кожному ребру ставиться у відповідність вартість транспортування одиниці продукції на цій ділянці (c_i), пропускна здатність (D_i), а також можливий потік (x_i), який необхідно знайти. Для кожного варіанту пропонується різний напрямок орієнтування графу транспортної мережі, тобто початковий і кінцевий пункти.

Основні завдання

1. Сформувати базу даних за своїм варіантом.
2. На графі транспортної мережі (рис. 4.1) за своїм варіантом (табл. 4.1) виділити початкову і кінцеву вершину потоків.
3. Розставити напрямки потоків на ребрах графу таким чином, щоб потоки від початкової вершини всі відходили, а в кінцеву вершину – всі входили, на проміжних ребрах розстановка напрямків проводиться довільно, але подається один напрямок.
4. Ввести в систему Mathcad цільову функцію вартості перевезень $F(x)$ за виразом 4.5, враховуючи вартість перевезень на ділянках (ребрах) графа

транспортної мережі (табл. 4.2), та вважаючи, що $x_j := 1, j = 1, \dots, 13, x_j \geq 0$, а також умова збереженості потоку перевезення, вважаючи, що сума потоку, що входить дорівнює 1, і що надходить дорівнює 1.

5. Використовуючи функцію *Minimize* (F, x), знайти мінімальну вартість перевезень згідно умов варіанту.

6. Ввести в систему Mathcad цільову функцію $\Phi(x)$, що описує можливостей транспортний потік, беручи суму потоків на ребрах графа, що входять у кінцевий пункт. Ввести також рівня рівновагу для проміжних пунктів, а також систему обмежень, враховуючи пропускну здатність потоку на кожному ребрі графу (табл. 4.3).

7. Використавши функцію *Maximize* (Φ, x), знайти максимальний потік в мережі графу.

8. За результатами розрахунків зробити висновки.

Варіанти завдань

Таблиця 4.1 – Початкова і кінцева вершини графу транспортної мережі

Варіант	Початок	Кінець	Варіант	Початок	Кінець
1	A_1	A_8	14	A_5	A_2
2	A_1	A_7	15	A_5	A_1
3	A_1	A_5	16	A_5	A_9
4	A_2	A_4	17	A_4	A_7
5	A_2	A_5	18	A_4	A_9
6	A_2	A_8	19	A_4	A_7
7	A_2	A_9	20	A_4	A_9
8	A_7	A_1	21	A_4	A_8
9	A_7	A_4	22	A_4	A_2
10	A_8	A_1	23	A_9	A_1
11	A_8	A_4	24	A_9	A_2
12	A_8	A_2	25	A_9	A_4
13	A_5	A_7	26	A_9	A_5

Таблиця 4.2 – Вартість транспортування одиниці продукції на ділянках ребер графу транспортної мережі, відн. один.

№	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
1	15	24	10	27	34	32	30	25	13	17	29	23	21	20
2	17	26	11	29	31	23	25	22	16	19	18	17	21	22
3	32	30	25	13	17	15	24	10	27	34	34	32	30	25
4	23	25	22	16	19	17	26	11	29	31	31	23	25	22
5	32	30	25	13	17	29	23	21	20	27	34	32	30	25
6	23	25	22	16	19	18	17	21	22	29	31	23	25	22
7	15	24	10	27	34	34	32	30	25	13	17	15	24	10
8	27	34	32	30	25	13	17	29	23	10	27	34	32	30
9	29	31	23	25	22	16	19	18	17	11	29	31	23	25
10	13	17	15	24	10	27	34	34	32	25	13	17	15	24
11	16	19	17	26	11	29	31	31	23	22	16	19	17	26
12	13	17	29	23	21	20	27	34	32	25	13	17	29	23
13	22	16	19	17	26	11	29	31	31	25	13	17	29	23
14	25	13	17	29	23	21	20	27	34	22	16	19	18	17
15	22	16	19	18	17	21	22	29	31	10	27	34	34	32
16	10	27	34	34	32	30	25	13	17	11	29	31	31	23
17	32	30	25	13	17	29	23	10	27	21	20	27	34	32
18	23	25	22	16	19	18	17	11	29	21	22	29	31	23
19	15	24	10	27	34	34	32	25	13	30	25	13	17	15
20	29	23	21	20	27	34	22	16	19	18	17	21	17	21
21	18	17	21	22	29	31	10	27	34	34	32	30	32	30
22	34	32	30	25	13	17	32	30	25	13	17	29	17	29
23	13	17	29	23	10	27	23	25	22	16	19	18	19	18
24	16	19	18	17	11	29	15	24	10	27	34	34	34	34
25	27	34	34	32	25	13	29	23	21	20	27	34	27	34

Таблиця 4.3 – Пропускна здатність транспортного потоку на ділянках ребер графу транспортної мережі, відн. один.

№	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}
1	40	24	16	24	18	10	12	14	20	24	10	30	40	24
2	18	10	12	14	20	16	24	18	10	12	14	24	18	10
3	12	14	20	24	10	30	40	24	16	24	18	10	12	14
4	24	18	10	12	14	24	18	10	12	14	20	16	24	18
5	24	18	10	12	14	20	24	10	16	24	18	10	12	14
6	14	20	16	24	18	10	12	14	12	14	20	16	24	18
7	24	10	30	40	24	16	24	18	20	24	10	30	40	24
8	12	14	24	18	10	12	14	20	10	12	14	24	18	10
9	24	18	10	12	14	20	24	10	14	20	16	24	18	10
10	14	20	16	24	18	10	12	14	24	10	30	40	24	16
11	24	10	30	40	24	16	24	18	12	14	24	18	10	12
12	12	14	24	18	10	12	14	20	12	14	20	24	10	16
13	12	14	20	24	10	16	24	18	10	20	24	10	30	40
14	24	18	10	12	14	12	14	20	16	10	12	14	24	18
15	40	24	16	24	18	20	24	10	30	10	12	14	20	24
16	18	10	12	14	20	10	12	14	24	16	24	18	10	12
17	12	14	20	24	10	14	20	16	24	30	40	24	16	24
18	24	18	10	12	14	24	10	30	40	24	18	10	12	14
19	40	24	16	24	18	12	14	24	18	10	12	14	20	24
20	18	10	12	14	20	12	14	20	24	16	24	18	10	12
21	24	18	10	12	14	24	18	10	12	14	20	12	14	20
22	40	24	16	24	18	12	24	10	16	24	18	10	20	10
23	18	10	12	14	20	12	12	14	12	14	20	16	10	14
24	24	10	16	24	18	10	24	18	20	24	10	30	10	16
25	12	14	12	14	20	16	14	20	10	12	14	24	16	30

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №4

Тема: Оптимізація розподілу транспортних потоків за допомогою моделі графів.

Виконав ст.гр.

Варіант №

База даних:

$$C_1 := 20 \quad C_2 := 15 \quad C_3 := 17 \quad C_4 := 16 \quad C_5 := 13 \quad C_6 := 14 \quad C_7 := 15 \quad C_8 := 18 \quad C_9 := 10$$

$$C_{10} := 11 \quad C_{11} := 13 \quad C_{12} := 14 \quad C_{13} := 16 \quad C_{14} := 34$$

$$D_1 := 38 \quad D_2 := 50 \quad D_3 := 25 \quad D_4 := 31 \quad D_5 := 20 \quad D_6 := 15 \quad D_7 := 18 \quad D_8 := 32 \quad D_9 := 29$$

$$D_{10} := 24 \quad D_{11} := 19 \quad D_{12} := 19 \quad D_{13} := 17 \quad D_{14} := 34$$

Цільова функція:

$$\text{ORIGN} := 1$$

$$F(x) := C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + C_3 \cdot x_3 + C_4 \cdot x_4 + C_5 \cdot x_5 + C_6 \cdot x_6 + C_7 \cdot x_7 + C_8 \cdot x_8 + C_9 \cdot x_9 \dots \\ + C_{10} \cdot x_{10} + C_{11} \cdot x_{11} + C_{12} \cdot x_{12} + C_{13} \cdot x_{13} + C_{14} \cdot x_{14}$$

Система обмежень:

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1 \quad x_4 := 1 \quad x_5 := 1 \quad x_6 := 1 \quad x_7 := 1 \quad x_8 := 1 \quad x_9 := 1 \quad x_{10} := 1$$

$$x_{11} := 1 \quad x_{12} := 1 \quad x_{13} := 1 \quad x_{14} := 1$$

Given

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0 \quad x_7 \geq 0 \quad x_8 > 0 \quad x_9 \geq 0 \quad x_{10} \geq 0$$

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0 \quad x_{13} \geq 0 \quad x_{14} \geq 0$$

За допомогою знаку "жирне" дорівнює (Булева рівність):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 & x_7 + x_{14} &= x_{11} \\ x_1 &= x_9 + x_4 & x_6 &= x_{14} + x_{12} \\ x_2 + x_4 + x_5 &= x_8 + x_7 & x_{12} &= x_{13} \\ x_3 &= x_5 + x_6 & x_{10} + x_{11} + x_{13} &= 1 \\ x_9 + x_8 &= x_{10} \end{aligned}$$

Мінімізація маршруту:

$$R := \text{Minimize}(F, x)$$

$$R^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

Маршрут мінімальної вартості перевезень в графі транспортної мережі сполучає ребра: x_1, x_9, x_{10}

Цільова функція:

$$\text{ORIGN} := 1$$

$$Z(x) := x_{10} + x_{11} + x_{13}$$

Система обмежень:

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1 \quad x_4 := 1 \quad x_5 := 1 \quad x_6 := 1 \quad x_7 := 1 \quad x_8 := 1 \quad x_9 := 1 \quad x_{10} := 1 \\ x_{11} := 1 \quad x_{12} := 1 \quad x_{13} := 1 \quad x_{14} := 1$$

Given

$$0 \leq x_1 \leq D_1 \quad 0 \leq x_2 \leq D_2 \quad 0 \leq x_3 \leq D_3 \quad 0 \leq x_4 \leq D_4 \quad 0 \leq x_5 \leq D_5 \quad 0 \leq x_6 \leq D_6$$

$$0 \leq x_7 \leq D_7 \quad 0 \leq x_8 \leq D_8 \quad 0 \leq x_9 \leq D_9 \quad 0 \leq x_{10} \leq D_{10} \quad 0 \leq x_{11} \leq D_{11} \quad 0 \leq x_{12} \leq D_{12}$$

$$0 \leq x_{13} \leq D_{13} \quad 0 \leq x_{14} \leq D_{14}$$

За допомогою знаку "жирне дорівнює" (Булева рівність):

$$x_1 = x_9 + x_4 \quad x_7 + x_{14} = x_{11} \quad x_3 = x_5 + x_6 \quad x_{12} = x_{13}$$

$$x_2 + x_4 + x_5 = x_8 + x_7 \quad x_6 = x_{14} + x_{12} \quad x_9 + x_8 = x_{10}$$

Розподілення потоків:

$$Q := \text{Maximize}(Z, x)$$

$Q^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	0	1.067	40.508	15.425	0.6	0.425	15	18	23.533	0.467	24	18	15	15	0

Максимальний потік в мережі $Z(Q) = 57$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 57 \quad \text{- вихідний потік} \quad Q_{10} + Q_{11} + Q_{13} = 57 \quad \text{- вхідний потік}$$

Контрольні запитання

1. Що собою являють сітьові моделі транспортних потоків?
2. Які основні елементи графу транспортної мережі?
3. Що являє собою цільова функція загальної вартості транспортного процесу?
4. Які обмеження наявні в моделі графів, коли мінімізацію вартість транспортних перевезень?
5. Що собою являє математична модель транспортного потоку?
6. Як в системі Mathcad знаходиться максимальний потік в транспортній мережі, зображеній у вигляді графа?
7. Як складається цільова функція потоку в графі транспортної мережі?
8. Як складаються рівняння збереженості транспортного потоку?

Література: [3-7, 26-28]

Лабораторна робота №5

Тема: ПРОГНОЗУВАННЯ ВЕЛИЧИНИ МАТЕРІАЛОПОТОКУ В АВТОТРАНСПОРТНІЙ СИСТЕМІ.

Мета – визначити оптимальне значення матеріалопотоку на ринку чистої конкуренції, мінімізуючи питомі витрати і максимізуючи доходи і прибуток підприємства, що займається вантажоперевезеннями.

Короткі теоретичні відомості

Питомі витрати $B_{num.i}$, грн/т (постійні, змінні і загальні) логістичної автотранспортної системи визначаються для кожного значення величини матеріалопотоку за виразом:

$$B_{num.i} = \frac{B_i}{Q_i}, \quad (5.1)$$

де B_i – витрати, що відповідають i -ому значенню обсягу матеріалопотоку, грн.; Q_i – обсяг матеріалопотоку в i -ой точці, т.

Відповідно середні питомі витрати дорівнюють:

$$\bar{B}_{num} = \frac{\bar{B}}{\bar{Q}}, \quad (5.2)$$

де \bar{B} – середні витрати, що відповідають повному обсягу матеріалопотоку; \bar{Q} – середній обсяг матеріалопотоку.

$$\bar{B} = \frac{\sum B_i}{n}; \quad \bar{Q} = \frac{\sum Q_i}{n}. \quad (5.3)$$

Граничні питомі витрати (постійні, змінні і загальні) логістичної автотранспортної системи визначаються для кожного значення величини матеріалопотоку за виразом:

$$B_{zp.} = \frac{B_{\max} - B_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}}, \quad (5.4)$$

де B_{\max} і B_{\min} – витрати, що відповідають об'ємам матеріалопотоку Q_{\max} і Q_{\min} , грн; Q_{\max} і Q_{\min} – відповідно максимальні і мінімальні значення обсягу матеріалопотоку із впорядкованого по зростанню значень ряду, т.

Для розрахунку доходів і прибутку автотранспортного підприємства (АТП) необхідно враховувати значення обсягу матеріалопотоку (табл. 5.2), що відповідають визначеній ціні одиниці матеріалопотоку. Доход АТП при встановленій ціні одиниці матеріалопотоку (C_i) визначають за виразом:

$$D_i = C_i \cdot Q_i, \quad (5.5)$$

а прибуток дорівнює:

$$\Pi_i = D_i - B_i. \quad (5.6)$$

Питомий і граничний доход і прибуток АТП визначають аналогічно витратам транспортної системи. Для визначення оптимальних значень обсягу матеріалопотоку по будь-якому із критеріїв можна спрогнозувати змінні витрати при збільшенні обсягу матеріалопотоку вище заданих значень. В цьому випадку необхідно по залежності "загальні витрати - постійні витрати" і даним

таблиці 5.1 спрогнозувати змінні витрати. Потім по даним таблиці 3.2 методом лінійної екстраполяції спрогнозувати зміну об'єму матеріалопотоку від зміни ціни одиниці матеріалопотоку. Період прогнозування даних визначається шириною зони спадаючої віддачі на відповідних графіках чи діаграмах.

Основні завдання

1. Сформувати базу даних для свого варіанту, використавши таблицю 5.1 та 5.2 і ввести її в систему Mathcad.
2. Розрахувати питомі витрати автотранспортної системи.
3. Побудувати залежність обсягу питомих витрат від величини матеріалопотоку.
4. Визначити оптимальне значення розміру матеріалопотоку, мінімізуючи питомі сумарні витрати транспортної системи.
5. Визначити середню питому та граничну витрати АТП.
6. Визначити дохід та прибуток автотранспортного підприємства та графічно їх відобразити.
7. За результатами обчислень зробити висновки.

Варіанти завдань

Таблиця 5.1 – Змінні витрати виробництва (B , грн) та величина матеріалопотоку (Q , т)

№ Вар.	Матеріалопотік Q , т.									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	800	1360	1920	2480	3040	3680	4320	5120	6240	7760
2	960	1600	2080	2480	2880	3280	3760	4320	5040	6000
3	960	1860	2580	3180	3660	4320	5040	5760	6600	7560
4	1200	2320	3360	4320	5200	6000	6720	7360	8080	8880
5	1800	3400	4800	6100	7400	8700	10200	11800	13600	15600
6	880	1600	2280	2960	3680	4480	5360	6320	7360	8560
7	1120	2020	3120	4000	4800	5520	6160	6960	8000	9200
8	960	1840	2640	3360	4000	4720	5520	6400	7360	8320
9	1040	1920	2720	3440	4160	5120	6160	7360	8720	10240
10	810	1530	2205	2835	3420	4050	4725	5445	6210	7020
11	720	2300	2705	2954	3256	3970	4235	5115	6213	7223
12	1090	2005	2345	2980	3609	6709	7680	8790	9234	10450
13	689	1025	2345	2978	3457	4230	5980	6001	6987	7800
14	579	1034	1980	2460	3270	4450	4980	5320	5900	6340
15	711	1115	2765	3001	4557	5325	6389	7024	8009	8790
16	809	1078	1980	2590	3060	4010	5230	6057	6900	7210
17	1070	2334	3567	4234	5032	6153	7231	8509	9575	10790
18	2078	2908	3657	4112	4807	5236	6790	7860	8230	9970
19	678	1023	1978	2531	3090	3897	4523	5051	5997	6430

Продовження табл. 5.1

№ Вар.	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
20	490	980	1307	2113	2908	3478	4235	5124	6098	6998
21	701	1321	2319	3010	3895	4238	5233	6209	7003	7982
22	800	1765	2096	2770	3328	4423	5007	5890	6356	7376
23	909	1144	2321	3021	3965	4581	5231	6509	8234	10674
24	1101	2546	4278	5821	7095	8591	9230	10890	11065	11908
25	1313	2578	3976	5267	6980	8210	10098	11672	12426	13659

Таблиця 5.2 – Зміна попиту на продукцію (W , т) від ціни одиниці матеріалопотоку (C , грн./т)

№ Вар.	Ціна одиниці матеріалопотоку C , грн./т.									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
2	120	110	100	90	80	70	60	50	40	30
3	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20
4	150	130	110	90	70	50	40	30	20	10
5	130	110	90	80	70	60	50	40	30	20
6	140	130	120	110	100	90	80	70	60	50
7	160	140	120	100	80	60	40	30	20	10
8	160	150	140	130	120	110	100	90	80	70
9	170	160	150	140	130	120	110	100	90	80
10	190	170	150	130	110	90	70	50	30	10
11	200	190	180	170	160	150	130	110	90	70
12	210	190	170	150	130	110	90	70	50	30
13	200	180	160	140	120	100	80	60	40	20
14	180	160	140	120	100	80	60	40	20	0
15	180	170	160	150	140	120	100	80	60	40
16	220	200	180	160	140	120	100	70	50	30
17	220	210	200	190	170	150	130	110	90	70
18	230	220	210	200	180	160	140	100	80	60
19	230	210	190	170	150	130	110	90	70	50
20	240	220	200	180	160	140	120	100	80	60
21	250	230	210	190	170	150	130	110	90	70
22	260	230	200	170	140	110	80	50	20	10
23	260	240	220	200	180	160	140	120	100	80
24	270	250	230	210	190	170	150	130	110	80
25	280	260	240	220	200	180	160	140	120	100

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №5

Тема: Прогнозування величини матеріалопотоку в автотранспортній системі.

Виконав ст.гр.

Варіант №

База даних:

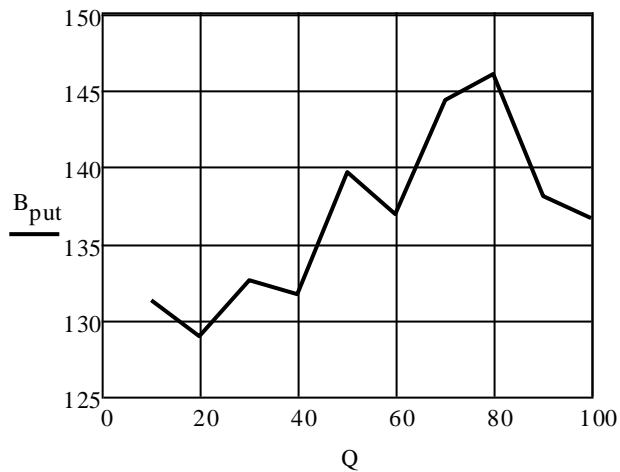
$$\begin{array}{l}
 B := \begin{pmatrix} 1313 \\ 2578 \\ 3976 \\ 5267 \\ 6980 \\ 8210 \\ 10098 \\ 11672 \\ 12426 \\ 13659 \end{pmatrix} \\
 Q := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \\ 80 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix} \\
 W := \begin{pmatrix} 280 \\ 260 \\ 240 \\ 220 \\ 200 \\ 180 \\ 160 \\ 140 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix} \\
 C := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \\ 600 \\ 700 \\ 800 \\ 900 \\ 1000 \end{pmatrix} \\
 n := 10
 \end{array}$$

Питомі витрати:

$$B_{\text{put}} := \frac{B}{Q}$$

$$B_{\text{put}} =$$

131.3
128.9
132.533
131.675
139.6
136.833
144.257
145.9
138.067
136.59



Залежність питомих витрат від обсягу матеріалопотоку є екстремальною.

З аналізу графічної залежності $Q_{\text{опт}} = 20$

Середня питома витрата:

$$\begin{aligned}
 B_{\text{ser}} &:= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} B_i}{n} \\
 Q_{\text{ser}} &:= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i}{n} \\
 B_{\text{put.ser}} &:= \frac{B_{\text{ser}}}{Q_{\text{ser}}} \\
 B_{\text{put.ser}} &= 138.507
 \end{aligned}$$

Величина граничних питомих витрат:

$$B_{\max} := \max(B) \quad B_{\min} := \min(B)$$

$$Q_{\max} := \max(Q) \quad Q_{\min} := \min(Q)$$

$$B_{gr} := \frac{B_{\max} - B_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \quad B_{gr} = 137.178$$

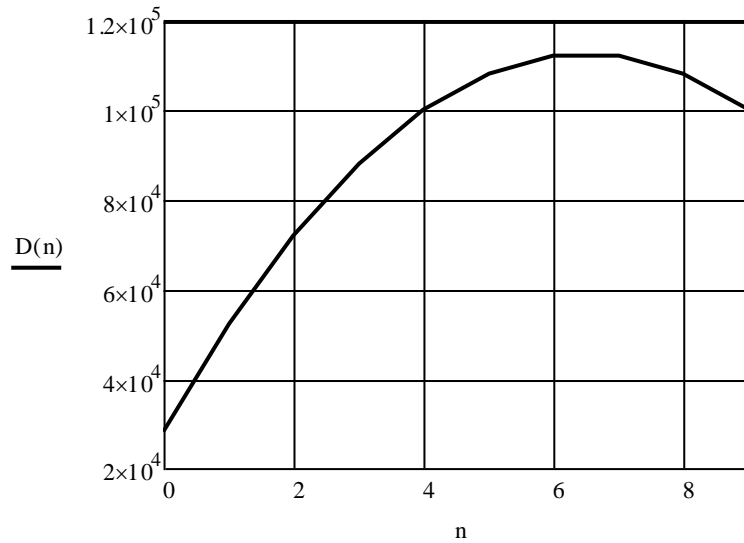
Дохід автопідприємства:

$$n := 0..9$$

$$D(n) := C_n \cdot W_n$$

$D(n) =$

$2.8 \cdot 10^4$
$5.2 \cdot 10^4$
$7.2 \cdot 10^4$
$8.8 \cdot 10^4$
$1 \cdot 10^5$
$1.08 \cdot 10^5$
$1.12 \cdot 10^5$
$1.12 \cdot 10^5$
$1.08 \cdot 10^5$
$1 \cdot 10^5$

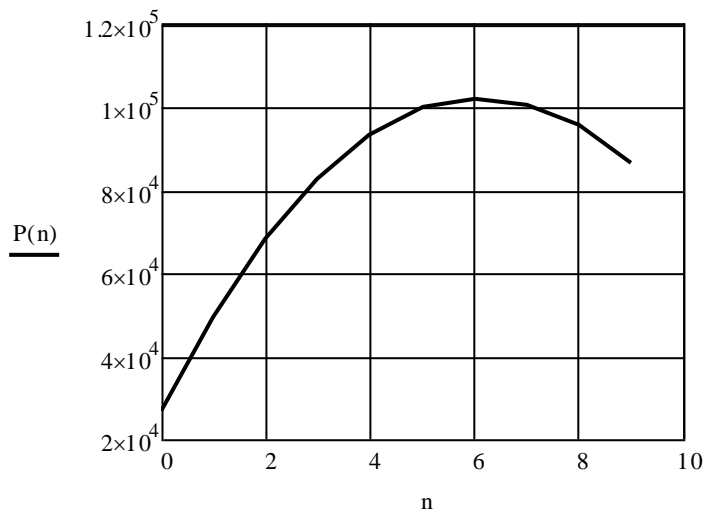


Прибуток автопідприємства:

$$P(n) := D(n) - B_n$$

$P(n) =$

$2.669 \cdot 10^4$
$4.942 \cdot 10^4$
$6.802 \cdot 10^4$
$8.273 \cdot 10^4$
$9.302 \cdot 10^4$
$9.979 \cdot 10^4$
$1.019 \cdot 10^5$
$1.003 \cdot 10^5$
$9.557 \cdot 10^4$
$8.634 \cdot 10^4$



Таким чином, залежність доходу і прибутку АТП від обсягу матеріалопотоку є екстремальною.

Контрольні запитання

1. Що таке матеріалопотік і як його розрахувати?
2. Які витрати підлягають ревізії цільової установки збільшення долі ринку автотранспортного підприємства на ринку чистої конкуренції?
3. У чому полягає різниця між еластичним і нееластичним попитом?
4. Як розрахувати питомі і граничні витрати автотранспортної системи?
5. Як розрахувати питомі і граничні доходи та прибуток автотранспортного підприємства?
6. Як визначити оптимальні розміри матеріалопотоку для максимізації доходів і прибутку автотранспортного підприємства?
7. Який вплив величини матеріалопотоку на зміну витрат, доходів і прибутку автотранспортного підприємства і транспортної системи в цілому.

Література: [3-8, 15-17, 23-28].

Лабораторна робота №6

Тема: ПРОГНОЗУВАННЯ ОБСЯГУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ АВТОТРАНСПОРТНИМ ПІДПРИЄМСТВОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ.

Мета – визначення прогнозного значення обсягу перевезень автотранспортним підприємством за допомогою моделі розвитку.

Короткі теоретичні відомості

Модель розвитку подається у вигляді залежності досліджуваних величин в часі – рівняння тренду.

Вид тренду тимчасового ряду обсягу перевезень автотранспортним підприємством (АТП) в першому наближенні є лінійним рівнянням:

$$Q = a_0 + a_1 \cdot t, \quad (6.1)$$

де a_0, a_1 – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити.

Вони визначаються за допомогою системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a_0, a_1)}{\partial a_0} = 0; \\ \frac{\partial Q(a_0, a_1)}{\partial a_1} = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Використовуючи базу експериментальних даних система (6.2) набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n Q_i; \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i, \end{cases} \quad (6.3)$$

де n – кількість звітних даних; t – номер звітного року.

Розв'язком системи (6.3) є:

$$a_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i - \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}; \quad (6.4)$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n} - a_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}. \quad (6.5)$$

Обсяг перевезень можна описати і трендом у вигляді рівняння параболи:

$$Q = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2, \quad (6.6)$$

де b_0, b_1, b_2 – коефіцієнти моделі.

Коефіцієнти b_0, b_1 і b_2 також знаходять розв'язавши систему нормальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_0} = 0; \\ \frac{\partial Q(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_1} = 0; \\ \frac{\partial Q(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_2} = 0. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Врахувавши базу експериментальних даних, маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i; \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i; \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^4 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i^2. \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Розв'язати систему (6.6) можна матричним методом, представивши систему рівнянь (6.8) у матричному вигляді:

$$A \cdot B = C, \quad (6.9)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 & \sum_{i=1}^n t_i^3 & \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Q_i \\ \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i^2 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Розв'язавши матричне рівняння (6.9) відносно матриці B невідомих коефіцієнтів тренду (6.6), маємо:

$$\begin{array}{l} A \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot C; \\ B = A^{-1} \cdot C, \end{array} \quad (6.11)$$

де A^{-1} – обернена матриця до матриці A .

Середню похибку апроксимації $\bar{\varepsilon}$ для обох моделей тренду тимчасового ряду визначають похибку за виразом:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_i - Q'_i|}{n}, \quad (6.12)$$

де Q'_i – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане за допомогою моделі розвитку (6.1).

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_i - Q''_i|}{n}, \quad (6.13)$$

де Q''_i – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане за допомогою моделі (6.6).

Значення парних коефіцієнтів кореляції між Q і t , Q і t^2 оцінюється за виразом:

$$r_{Qt} = \frac{\overline{Q \cdot t} - \bar{Q} \cdot \bar{t}}{\sigma_Q \cdot \sigma_t}, \quad (6.14)$$

де відповідні середні величини дорівнюють:

$$\overline{Q \cdot t} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i}{n}; \quad (6.15)$$

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n}; \quad (6.16)$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}. \quad (6.17)$$

$$r_{Qt^2} = \frac{\overline{Q \cdot t^2} - \bar{Q} \cdot \bar{t}^2}{\sigma_Q \cdot \sigma_{t^2}}, \quad (6.18)$$

де

$$\overline{Q \cdot t^2} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \cdot t_i^2}{n}; \quad (6.19)$$

$$\bar{t}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n} \quad (6.20)$$

σ_Q , σ_t , σ_{t^2} – значення середньоквадратичних відхилень для досліджуваних величин:

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{\sum (Q_i - \bar{Q})^2}{n}}; \quad \sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{n}}; \quad \sigma_{t^2} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{n}}. \quad (6.21)$$

Основні завдання

1. Сформувати базу даних для свого варіанту, використавши таблицю 6.1.
2. Обчислити невідомі коефіцієнти систем рівнянь (6.3) і (6.8).
3. За рівняннями тренду (6.1) та (6.6) написати функцію обсягу перевезень, врахувавши значення невідомих коефіцієнтів системи рівнянь (6.3) і (6.8).
4. Побудувати графіки отриманих рівнянь трендів в системі координат (Q, t) . Звести графіки в одну систему координат (Q, t) .
5. Визначити середню похибку апроксимації для обох моделей обсягу перевезень за виразами (6.12) і (6.13).
6. Розрахувати значення парних коефіцієнтів кореляції між Q і t , та Q і t^2 за виразами (6.14) і (6.18).
7. Визначити прогнозне значення обсягу перевезень у $n+1$ року за двома моделями.
8. На підставі середньої похибки апроксимації і коефіцієнтів кореляції вибрати найбільш адекватну для прогнозування модель. Порівняти цей вибір з графічним варіантом (п.4).

9. Зробити висновки за результатами обчислень.

Варіанти завдань

Таблиця 6.1 – Обсяг перевезень за роками, тис. т

№ варіанту	Номер звітного року, <i>t</i>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	162	208	186	190	190	210	213	206	194	214
2	130	152	170	165	153	168	152	165	158	163
3	178	168	134	152	130	144	138	143	133	176
4	214	126	202	168	139	167	158	173	148	170
5	136	158	129	153	184	214	170	190	186	167
6	144	146	148	139	210	210	206	216	208	151
7	122	131	138	152	163	145	152	157	160	149
8	133	162	184	180	142	141	143	151	150	191
9	129	151	150	160	155	168	172	167	160	158
10	118	123	135	141	185	173	178	181	183	139
11	158	211	170	195	185	213	215	216	201	217
12	135	162	185	175	155	163	158	145	165	173
13	181	171	144	143	128	147	141	149	127	176
14	221	134	198	167	141	156	144	191	153	171
15	141	147	133	157	211	217	198	193	167	198
16	156	154	153	147	217	205	209	213	218	187
17	125	125	141	167	184	148	165	133	128	175
18	153	121	177	168	121	178	134	188	113	213
19	151	124	147	171	175	186	191	131	158	139
20	201	142	155	189	179	171	154	123	190	111
21	121	110	220	113	187	154	180	103	117	167
22	156	211	150	134	176	199	217	197	191	188
23	160	142	165	187	161	176	113	197	173	145
24	157	187	151	169	141	156	181	122	141	193
25	201	134	200	154	103	187	190	151	109	123

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №6

Тема: Прогнозування обсягу перевезень автотранспортним підприємством за допомогою моделі розвитку.

Виконав ст.гр.

Варіант №

База даних:

$$Q := \begin{pmatrix} 201 \\ 134 \\ 200 \\ 154 \\ 103 \\ 187 \\ 190 \\ 151 \\ 109 \\ 123 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad n := 10$$

Визначення коефіцієнтів тренду для лінійного рівняння (1.1):

$$a_1 := \frac{n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} t_i}{n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i \right)^2} \quad a_0 := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i}{n} - a_1 \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} t_i}{n}$$

$$a_1 = -5.636$$

$$a_0 = 186.2$$

Також ці коефіцієнти можна визначити за допомогою функцій програми Mathcad:

$$a'_1 := \text{slope}(t, Q)$$

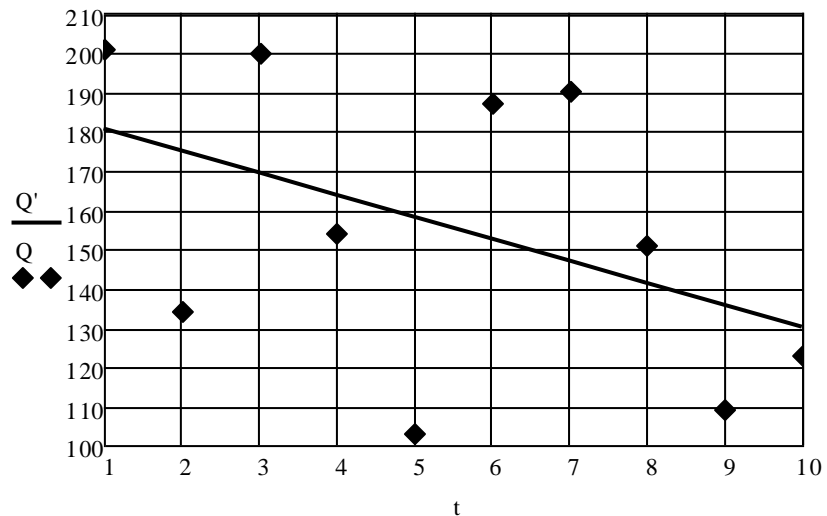
$$a'_0 := \text{intercept}(t, Q)$$

$$a_1 = -5.636$$

$$a_0 = 186.2$$

Визначення тренду тимчасового ряду обсягу перевезень АТП:

$$Q' := 186.2 - 5.636t$$

$$Q' = \begin{array}{|c|} \hline 180.564 \\ \hline 174.928 \\ \hline 169.292 \\ \hline 163.656 \\ \hline 158.02 \\ \hline 152.384 \\ \hline 146.748 \\ \hline 141.112 \\ \hline 135.476 \\ \hline 129.84 \\ \hline \end{array}$$


Для прогнозування обсягу перевезень на 11-й рік приймаємо, що $t=11$:

$$Q'_{11} := 186.2 - 5.63611 \quad Q'_{11} = 124.204$$

Визначення коефіцієнтів тренду для рівняння параболи (1.6) матричним методом:

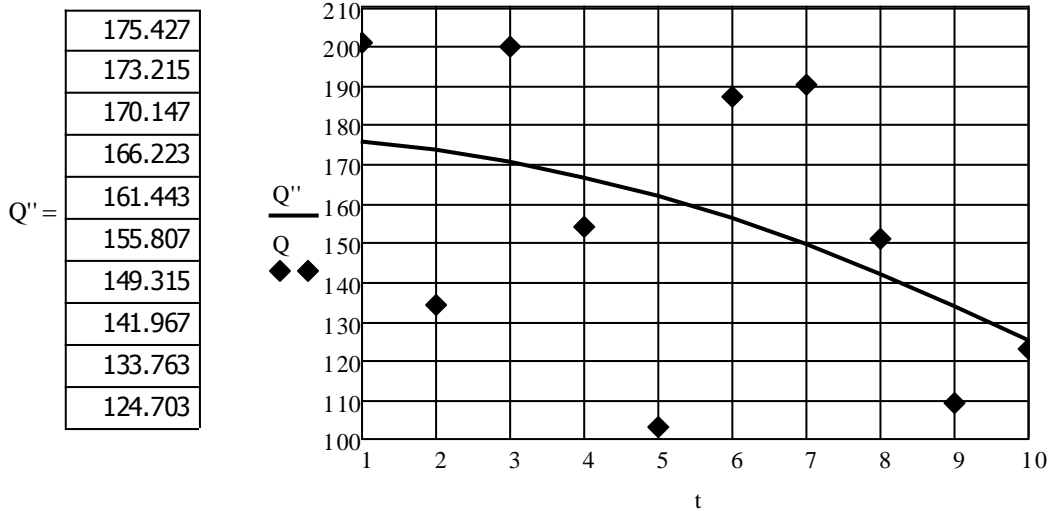
$$A := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=0}^{n-1} t_i & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} t_i & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2 & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^3 \\ \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2 & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^3 & \sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^4 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot t_i) \\ \sum_{i=0}^{n-1} [Q_i \cdot (t_i)^2] \end{bmatrix}$$

Розв'язок матричного рівняння відносно матриці відомих коефіцієнтів тренду:

$$B := A^{-1} \cdot C \quad B = \begin{pmatrix} 176.783 \\ -0.928 \\ -0.428 \end{pmatrix}$$

Визначення обсягу перевезень за допомогою тренду у вигляді рівняння параболи:

$$Q'' := 176.783 - 0.928t - 0.428t^2$$



Для прогнозування обсягу перевезень на 11-й рік приймаємо, що $t=11$:

$$Q''_{11} := 176.783 - 0.928 \cdot 11 - 0.428 \cdot 11^2 \quad Q''_{11} = 114.787$$

Можна бачити, що прогнозований обсяг за першою і другою моделлю різний $Q'_{11} > Q''_{11}$

Похибки апроксимації також різні, для другої моделі вона менша. Це означає, що друга модель більш точно відображає процес перевезення вантажів.

Визначення похибки апроксимації для обох моделей тренду:

$$\varepsilon_{\text{ser1}} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i - Q'_i|}{n} \quad \varepsilon_{\text{ser2}} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i - Q''_i|}{n}$$

$$\varepsilon_{\text{ser1}} = 27.782 \quad \varepsilon_{\text{ser2}} = 27.268$$

Визначаємо середні значення і середньоквадратичні відхилення для досліджуваних величин:

$$Q_{\text{ser}} := \text{mean}(Q) \quad t_{\text{ser}} := \text{mean}(t) \quad t_{\text{ser2}} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2}{n}$$

$$Q_{\text{ser}} = 155.2 \quad t_{\text{ser}} = 5.5 \quad t_{\text{ser2}} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i)^2}{n}$$

$$\sigma_Q := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i - Q_{\text{ser}})^2}{n}} \quad \sigma_t := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{\text{ser}})^2}{n}} \quad \sigma_{t2} := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (t_i - t_{\text{ser2}})^2}{n}}$$

$$\sigma_Q = 35.625 \quad \sigma_t = 2.872 \quad \sigma_{t2} = 33.125$$

або за допомогою функції програми Mathcad:

$$\sigma'_Q := \text{stdev}(Q) \quad \sigma'_t := \text{stdev}(t) \quad \sigma'_{t2} := \text{stdev}(t^2)$$

$$\sigma'_Q = 35.625 \quad \sigma'_t = 2.872 \quad \sigma'_{t2} = 32.42$$

Визначаємо значення парних коефіцієнтів кореляції між Q і t та Q і t^2 :

$$r_{Qt} := \frac{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot t_i)}{n} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} t_i}{n}}{\sigma_Q \cdot \sigma_t} \quad r'_{Qt} := \text{corr}(t, Q)$$

$$r_{Qt} = -0.454 \quad r'_{Qt} = -0.454$$

$$r_{Qt2} := \frac{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} [Q_i \cdot (t_i)^2]}{n} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} t_{\text{ser2}}}{n}}{\sigma_Q \cdot \sigma_{t2}} \quad r'_{Qt2} := \text{corr}(t^2, Q)$$

$$r_{Qt2} = -0.453 \quad r'_{Qt2} = -0.462$$

Коефіцієнти кореляції r_{Qt} і r_{Qt^2} від'ємні. Це свідчить про зворотні зв'язки між зазначеними змінними Q і t та Q і t^2 . Оскільки $|r_{Qt^2}| > |r_{Qt}|$, то це означає, що щільність зв'язку між змінними за другою моделлю більша ніж за першою, тобто за другою моделлю зв'язок між змінними більш суттєвий.

Розрахунок похибок апроксимації середніх квадратичних відхилень і парних коефіцієнтів кореляції дають підстави зробити висновок про те, що модель (6.6) більш адекватно описує базу даних ніж лінійна (6.1). Про це свідчить і їх графічні відображення.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під терміном "модель розвитку" при прогнозуванні обсягу перевезень АТП?
2. Який принцип одержання трендів тимчасового ряду бази даних по автоперевезенню?
3. Що собою являє система нормальних рівнянь?
4. Як одержуються нормальні рівняння обсягу перевезень?
5. Як знаходять невідомі коефіцієнти моделі розвитку?
6. Що собою графічно являють рівняння тренду (1.1) і (1.4)?
7. Як визначити помилку апроксимації першої і другої моделі розвитку обсягу перевезень АТП?
8. Який висновок можна зробити з порівняння середніх похибок апроксимації $\bar{\varepsilon}_1$ і $\bar{\varepsilon}_2$?
9. Як обчислити парний коефіцієнт кореляції між Q і t , а також між Q і t^2 ?
10. Який висновок можна зробити з порівняння значень $r_{Q,t}$ і r_{Q,t^2} ?

Література: [3-7, 25-28].

Лабораторна робота №7

Тема: ПРОГНОЗУВАННЯ ОБСЯГУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ АВТОТРАНСПОРТНИМ ПІДПРИЄМСТВОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛЕЙ "ПОПИТ – ПРОПОЗИЦІЯ" ТА ЕЛАСТИЧНОСТІ.

Мета – визначення прогнозного значення обсягу перевезень автотранспортним підприємством за допомогою моделей "попит – пропозиція" та еластичності.

Короткі теоретичні відомості

Процес вантажних перевезень АТП можна описати двофакторною лінійною моделлю "попит – пропозиція":

$$Q = b_0 + b_1 \cdot P + b_2 \cdot T, \quad (7.1)$$

де Q , P – обсяг перевезень і обсяг виробництва; T – тариф за транспортну роботу; b_0 , b_1 , b_2 – коефіцієнти моделі, значення яких необхідно знайти.

Коефіцієнти b_0 , b_1 , b_2 знаходять розв'язавши систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_0} = 0; \\ \frac{\partial Q(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_1} = 0; \\ \frac{\partial Q(b_0, b_1, b_2)}{\partial b_2} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Врахувавши базу даних, система рівнянь (7.2) набуває вигляду:

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n P_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n Q_i; \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n P_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n P_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot T_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot P_i; \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n T_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot T_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n T_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot T_i. \end{cases} \quad (7.3)$$

Система рівнянь (7.3) в матричній формі має вигляд:

$$X \cdot B = Y, \quad (7.4)$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n P_i & \sum_{i=1}^n T_i \\ \sum_{i=1}^n P_i & \sum_{i=1}^n P_i^2 & \sum_{i=1}^n P_i \cdot T_i \\ \sum_{i=1}^n T_i & \sum_{i=1}^n P_i \cdot T_i & \sum_{i=1}^n T_i^2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Q_i \\ \sum_{i=1}^n Q_i \cdot P_i \\ \sum_{i=1}^n Q_i \cdot T_i \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Розв'язавши матричне рівняння (2.4), маємо:

$$X^{-1} \cdot X \cdot B = X^{-1} \cdot Y;$$

$$B = X^{-1} \cdot Y, \quad (7.6)$$

де X^{-1} – обернена матриця до матриці X .

Множинний коефіцієнт кореляції визначається за виразом:

$$R = \sqrt{\frac{r_{QP}^2 + r_{QT}^2 - 2 \cdot r_{QP} \cdot r_{QT} \cdot r_{PT}}{1 - r_{PT}^2}}, \quad (7.7)$$

де r_{QP} , r_{QT} , r_{PT} – відповідні коефіцієнти кореляції пар величин (Q, P) ; (Q, T) ; (P, T) .

$$r_{QP} = \frac{\overline{Q \cdot P} - \bar{Q} \cdot \bar{P}}{\sigma_Q \cdot \sigma_P}; \quad r_{QT} = \frac{\overline{Q \cdot T} - \bar{Q} \cdot \bar{T}}{\sigma_Q \cdot \sigma_T}; \quad r_{PT} = \frac{\overline{P \cdot T} - \bar{P} \cdot \bar{T}}{\sigma_P \cdot \sigma_T}, \quad (7.8)$$

де

$$\begin{aligned} \overline{Q \cdot P} &= \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \cdot P_i}{n}; \quad \bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n}; \quad \bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}; \\ \overline{Q \cdot T} &= \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \cdot T_i}{n}; \quad \bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n}; \quad \overline{P \cdot T} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cdot T_i}{n}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

а відповідні середньоквадратичні відхилення дорівнюють:

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}{n}}; \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P})^2}{n}}; \quad \sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}{n}}. \quad (7.10)$$

Середня похибка апроксимації $\bar{\varepsilon}$ для моделі визначається за виразом:

$$\bar{\varepsilon}_Q = \frac{\sum_{i=1}^n |Q_i - Q'_i|}{n}, \quad (7.11)$$

де Q'_i – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року, отримане за допомогою моделі "попит – пропозиція" і відображається рівнянням (7.1).

Обсяг виробництва у прогнозованому періоді P дорівнює:

$$P' = 1,05 \cdot P_{10}. \quad (7.12)$$

Тариф у прогнозованому періоді залишається на рівні останнього звітного року:

$$T' = T_{10}. \quad (7.13)$$

Модель еластичності обсягу перевезень має вигляд:

$$Q = c \cdot P^{\varepsilon_1} \cdot T^{\varepsilon_2}, \quad (7.14)$$

де c – константа; Q , P – обсяг перевезень і обсяг виробництва; T – тариф за транспортну роботу; ε_1 , ε_2 – коефіцієнти еластичності відповідних факторів.

Прологарифмуємо рівняння (7.14):

$$\begin{aligned} \ln(Q) &= \ln(c \cdot P^{\varepsilon_1} \cdot T^{\varepsilon_2}) \Rightarrow \ln(Q) = \ln(c) + \ln(P^{\varepsilon_1}) + \ln(T^{\varepsilon_2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(Q) = \ln(c) + \varepsilon_1 \cdot \ln(P) + \varepsilon_2 \cdot \ln(T). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Якщо ввести позначення:

$$\begin{aligned} Y &= \ln(Q) \Rightarrow Q = \exp(Y); \\ b_0 &= \ln(c) \Rightarrow c = \exp(b_0); \\ X_1 &= \ln(P) \Rightarrow P = \exp(X_1); \\ X_2 &= \ln(T) \Rightarrow T = \exp(X_2); \\ b_1 &= \varepsilon_1; & b_2 &= \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (7.16)$$

то модель (7.14) набуває вигляду:

$$\ln Q = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2, \quad (7.17)$$

Коефіцієнти b_0 , b_1 і b_2 визначаються за допомогою системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n X_{2i} = \sum_{i=1}^n \ln Q_i; \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i} \cdot X_{2i} = \sum_{i=1}^n \ln Q_i \cdot X_{1i}; \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n X_{2i} + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n X_{1i} \cdot X_{2i} + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n \ln Q_i \cdot X_{2i}. \end{cases} \quad (7.18)$$

Систему рівнянь (7.18) можна подати в матричному вигляді і розв'язати в матричному вигляді:

$$X_1 \cdot B = X_2, \quad (7.19)$$

$$\text{де } X_1 = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n \ln P_i & \sum_{i=1}^n \ln T_i \\ \sum_{i=1}^n \ln P_i & \sum_{i=1}^n \ln^2 P_i & \sum_{i=1}^n \ln P_i \cdot \ln T_i \\ \sum_{i=1}^n \ln T_i & \sum_{i=1}^n \ln P_i \cdot \ln T_i & \sum_{i=1}^n \ln^2 T_i \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Q_i \\ \sum_{i=1}^n \ln Q_i \cdot \ln P_i \\ \sum_{i=1}^n \ln Q_i \cdot \ln T_i \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Розв'язок в матричному вигляді дорівнює:

$$\begin{aligned} X_1^{-1} \cdot X_1 \cdot B &= X_1^{-1} \cdot X_2; \\ B &= X_1^{-1} \cdot X_2, \end{aligned} \quad (7.21)$$

де X_1^{-1} – обернена матриця до матриці X_1 .

Модель (7.17) з врахуванням (7.16), (7.20) остаточно набуває вигляду:

$$\ln Q = b_0 + b_1 \cdot \ln P + b_2 \cdot \ln T, \quad (7.21)$$

$$Q = \exp(b_0 + b_1 \cdot \ln P + b_2 \cdot \ln T) = \exp b_0 \cdot P^{b_1} \cdot T^{b_2}, \quad (7.23)$$

Середня похибка $\bar{\varepsilon}$ апроксимації для моделі еластичності:

$$\bar{\varepsilon}_2 = \sum_{i=1}^n \frac{|Q_i - Q_i''|}{n}, \quad (7.24)$$

де Q_i'' – розрахункове значення обсягу перевезень i -го року отримане за моделлю еластичного обсягу перевезень.

Основні завдання

1. Сформувати базу даних для свого варіанту, використавши таблиці 7.1-7.3.
2. Обчислити невідомі коефіцієнти за матричним розв'язком (7.6).
3. Отримані значення невідомих параметрів підставити в рівняння (7.1).
4. Дати графічну інтерпретацію моделі "попит – пропозиція".
5. За виразами (7.7)-(7.10) оцінити множинний коефіцієнт кореляції та середню похибку апроксимації моделі (7.1).
6. Обчислити обсяг перевезень у прогнозованому періоді, використавши (7.12) і (7.13).

7. Визначити невідомі коефіцієнти моделі еластичності обсягу перевезень (7.17) матричним методом за виразом (7.20).
8. Отримати визначену модель еластичності обсягу перевезень.
9. Побудувати поверхню відгуку за моделлю еластичності обсягу перевезень.
10. За виразом (7.24) оцінити середню похибку апроксимації для моделі еластичності обсягу перевезень.
11. Порівняти точність і адекватність моделей "попит – пропозиція".
12. Зробити висновки за результатами обчислень.

Варіанти завдань

Таблиця 7.1 – Обсяг перевезень за роками, тис. т

№ варіанту	Номер звітнього року, t									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	163	213	191	187	176	213	215	217	187	215
2	132	142	175	175	157	172	155	171	160	161
3	173	171	128	148	136	141	140	145	137	171
4	215	127	212	173	141	143	145	176	155	179
5	135	154	133	157	179	221	167	185	193	171
6	145	164	150	141	213	212	211	217	218	153
7	128	129	144	160	161	147	153	154	161	150
8	137	161	185	178	147	149	153	156	158	193
9	130	153	155	165	145	165	171	163	158	145
10	121	121	137	142	187	181	185	186	181	141
11	161	213	180	190	187	215	217	213	211	221
12	137	158	179	175	165	169	163	150	172	170
13	183	181	147	145	133	149	145	151	131	177
14	218	129	192	173	147	157	147	196	151	169
15	143	141	135	147	213	227	189	188	157	187
16	151	152	143	137	227	215	219	216	217	167
17	127	115	133	175	167	157	178	126	115	189
18	157	111	167	178	131	188	144	198	113	213
19	161	134	157	181	185	183	188	127	168	141
20	211	133	145	187	197	167	169	133	195	121
21	131	113	221	113	178	145	175	130	125	177
22	165	223	147	143	175	187	219	199	188	181
23	163	143	156	178	159	167	113	187	177	154
24	163	178	149	170	138	167	189	123	144	191
25	213	137	211	157	113	178	188	145	119	123

Таблиця 7.2 – Обсяг виробництва в регіоні *P*, тис. грн

№ варіанту	Номер звітного року, <i>t</i>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	999	998	995	989	979	963	940	909	870	823
2	711	763	809	756	808	842	876	870	898	921
3	459	521	581	639	693	742	786	825	859	863
4	344	402	406	431	462	462	519	525	873	583
5	932	916	908	905	913	926	941	955	968	978
6	802	805	809	802	824	833	843	853	862	859
7	716	722	726	728	741	723	773	754	740	736
8	698	691	675	653	632	616	606	602	601	613
9	191	195	198	199	199	198	194	196	193	175
10	931	958	975	986	992	995	987	967	965	987
11	812	797	813	780	821	798	824	823	812	857
12	757	742	716	732	751	746	753	711	723	756
13	678	701	678	623	623	678	623	612	659	641
14	201	175	188	193	213	208	197	176	183	181
15	937	938	977	986	982	987	943	938	951	969
16	812	825	819	812	814	843	847	855	822	839
17	726	725	736	741	744	725	753	751	742	778
18	678	671	665	647	652	636	676	632	641	617
19	198	197	158	189	201	203	213	185	183	185
20	937	948	976	985	952	975	984	978	965	945
21	822	835	839	841	857	864	875	861	837	890
22	726	723	743	738	747	733	756	768	737	729
23	679	671	673	647	645	629	653	678	638	643
24	211	198	204	207	213	178	191	176	186	177
25	911	978	967	973	979	985	999	989	975	977

Таблиця 7.3 – Тариф за транспортну роботу T , коп/т·грн

№ варіанту	Номер звітного року, t									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,0	3,0	3,0	3,1	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3
2	5,0	5,0	5,5	5,7	5,7	5,8	6,0	6,0	6,5	6,5
3	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,0	5,1	5,2	5,3
4	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	4,0	4,0	4,1	4,1
5	5,6	5,6	5,6	5,8	5,8	6,0	6,2	6,2	6,4	6,4
6	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8
7	4,8	4,8	4,8	4,8	4,8	5,0	5,0	5,0	5,2	5,2
8	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7	4,7	4,8	5,0	5,2	5,4
9	4,0	4,1	4,2	4,6	5,0	5,5	6,1	6,8	7,6	8,5
10	5,1	5,2	5,2	5,2	5,2	5,4	5,7	6,1	6,5	6,9
11	3,5	3,5	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7	3,7	3,8	3,8
12	5,3	5,3	5,3	5,5	5,5	5,6	5,6	5,7	5,7	5,7
13	4,1	4,1	4,1	4,3	4,3	4,3	4,3	4,4	4,5	4,5
14	3,9	3,9	3,9	4,0	4,0	4,0	4,1	4,1	4,2	4,2
15	5,9	5,9	5,9	5,9	6,0	6,0	6,0	6,1	6,1	6,1
16	3,7	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9	3,9	4,0
17	5,7	5,7	5,8	5,8	5,9	5,9	6,1	6,1	6,1	6,2
18	4,8	4,8	4,8	4,9	4,9	5,2	5,2	5,2	5,3	5,3
19	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9	4,2	4,2	4,2	4,3
20	5,1	5,1	5,1	5,2	5,2	5,3	5,3	5,4	5,4	5,5
21	8,0	8,0	8,0	8,1	8,1	8,1	8,2	8,2	8,2	8,3
22	6,0	6,0	6,5	6,7	6,7	6,8	6,8	6,9	6,9	7,0
23	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	8,0	8,1	8,2	8,3
24	4,7	4,7	4,8	4,8	4,9	4,9	5,0	5,0	5,1	5,1
25	5,9	5,9	5,9	6,0	6,0	6,0	6,2	6,2	6,3	6,3

Приклад виконання лабораторної роботи в системі Mathcad

Лабораторна робота №7

Тема: Прогнозування обсягу перевезень автотранспортним підприємством за допомогою моделей "попит-пропозиція" та еластичності.

Виконав ст.гр.

Варіант №

Бази даних:

$$Q := \begin{pmatrix} 213 \\ 137 \\ 211 \\ 157 \\ 113 \\ 178 \\ 188 \\ 145 \\ 119 \\ 123 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 911 \\ 978 \\ 967 \\ 973 \\ 979 \\ 985 \\ 999 \\ 989 \\ 975 \\ 977 \end{pmatrix} \quad T := \begin{pmatrix} 5.9 \\ 5.9 \\ 5.9 \\ 6.0 \\ 6.0 \\ 6.0 \\ 6.2 \\ 6.2 \\ 6.3 \\ 6.3 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad n := 10$$

Визначення коефіцієнтів матричним методом:

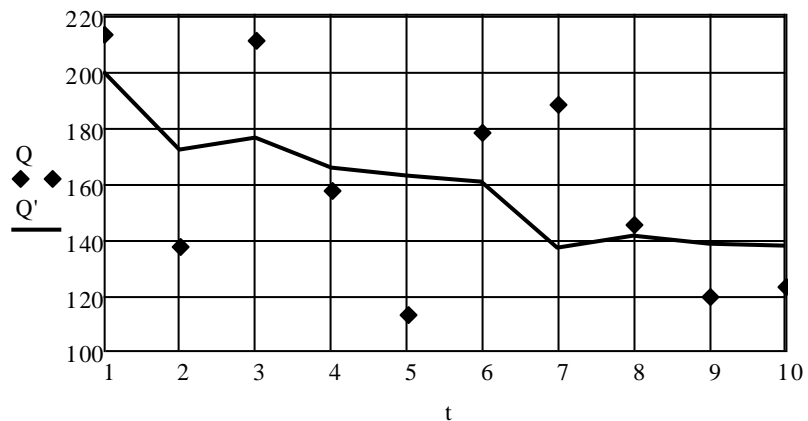
$$X := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=0}^{n-1} P_i & \sum_{i=0}^{n-1} T_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} P_i & \sum_{i=0}^{n-1} (P_i)^2 & \sum_{i=0}^{n-1} (P_i \cdot T_i) \\ \sum_{i=0}^{n-1} T_i & \sum_{i=0}^{n-1} (P_i \cdot T_i) & \sum_{i=0}^{n-1} (T_i)^2 \end{bmatrix} \quad Y := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot P_i) \\ \sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot T_i) \end{bmatrix}$$

Розв'язок матричного рівняння відносно матриці невідомих коефіцієнтів:

$$B := X^{-1} \cdot Y \quad B = \begin{pmatrix} 1.092 \times 10^3 \\ -0.415 \\ -87.228 \end{pmatrix}$$

Визначення двофакторної моделі "попит-пропозиція":

$$Q' := 1092 - 0.415P - 87.228T$$

$$Q' = \begin{array}{|c|} \hline 199.29 \\ \hline 171.485 \\ \hline 176.05 \\ \hline 164.837 \\ \hline 162.347 \\ \hline 159.857 \\ \hline 136.601 \\ \hline 140.751 \\ \hline 137.839 \\ \hline 137.009 \\ \hline \end{array}$$


Визначаємо середньоквадратичні відхилення для досліджуваних вели

$$Q_{\text{ser}} := \text{mean}(Q) \quad P_{\text{ser}} := \text{mean}(P) \quad T_{\text{ser}} := \text{mean}(T)$$

$$Q_{\text{ser}} = 158.4 \quad P_{\text{ser}} = 973.3 \quad T_{\text{ser}} = 6.07$$

$$\sigma_Q := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i - Q_{\text{ser}})^2}{n}} \quad \sigma_P := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (P_i - P_{\text{ser}})^2}{n}} \quad \sigma_T := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (T_i - T_{\text{ser}})^2}{n}}$$

$$\sigma_Q = 35.376 \quad \sigma_P = 22.441 \quad \sigma_T = 0.155$$

або за допомогою функції програми Mathcad:

$$\sigma'_Q := \text{stdev}(Q) \quad \sigma'_P := \text{stdev}(P) \quad \sigma'_T := \text{stdev}(T)$$

$$\sigma'_Q = 35.376 \quad \sigma'_P = 22.441 \quad \sigma'_T = 0.155$$

Визначаємо значення коефіцієнтів кореляції між Q і P, Q і T та P і T

$$r_{QP} := \frac{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot P_i)}{n} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} P_i}{n}}{\sigma_Q \cdot \sigma_P} \quad r'_{QP} := \text{corr}(Q, P)$$

$$r_{QP} = -0.442 \quad r'_{QP} = -0.442$$

$$r_{QT} := \frac{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Q_i \cdot T_i)}{n} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Q_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} T_i}{n}}{\sigma_Q \cdot \sigma_T} \quad r'_{QT} := \text{corr}(Q, T)$$

$$r_{QT} = -0.506 \quad r'_{QT} = -0.506$$

$$r_{PT} := \frac{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (P_i \cdot T_i)}{n} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} P_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} T_i}{n}}{\sigma_P \cdot \sigma_T} \quad r'_{PT} := \text{corr}(P, T)$$

$$r_{PT} = 0.468 \quad r'_{PT} = 0.468$$

Множинний коефіцієнт кореляції:

$$R := \sqrt{\frac{r_{QP}^2 + r_{QT}^2 - 2 \cdot r_{QP} \cdot r_{QT} \cdot r_{PT}}{1 - r_{PT}^2}} \quad R = 0.557$$

Середня похибка апроксимації:

$$\varepsilon_Q := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i - Q'_i|}{n} \quad \varepsilon_Q = 24.695$$

Обсяг перевезень у прогнозованому періоді, якщо $P_0 = 1.05 \cdot P_9$ і $T = T_9$:

$$Q_{\text{prog}} := 1092 - 0.4151 \cdot 0.05 P_9 - 87.288 T_9 \quad Q_{\text{prog}} = 116.358$$

Визначення коефіцієнтів моделі еластичності матричним методом:

$$X_1 := \begin{bmatrix} n & \sum_{i=0}^{n-1} \ln(P_i) & \sum_{i=0}^{n-1} \ln(T_i) \\ \sum_{i=0}^{n-1} \ln(P_i) & \sum_{i=0}^{n-1} \ln(P_i)^2 & \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(P_i) \cdot \ln(T_i)) \\ \sum_{i=0}^{n-1} \ln(T_i) & \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(P_i) \cdot \ln(T_i)) & \sum_{i=0}^{n-1} \ln(T_i)^2 \end{bmatrix} \quad X_2 := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(Q_i) \\ \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(Q_i) \cdot \ln(P_i)) \\ \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(Q_i) \cdot \ln(T_i)) \end{bmatrix}$$

Розв'язок матричного рівняння відносно матриці відомих коефіцієнтів:

$$B := X_1^{-1} \cdot X_2 \quad B = \begin{pmatrix} 25.453 \\ -2.066 \\ -3.439 \end{pmatrix}$$

Визначення двофакторної моделі "попит-пропозиція":

$$Q'' := 25.453 - 2.066 \ln(P) - 3.439 \ln(T)$$

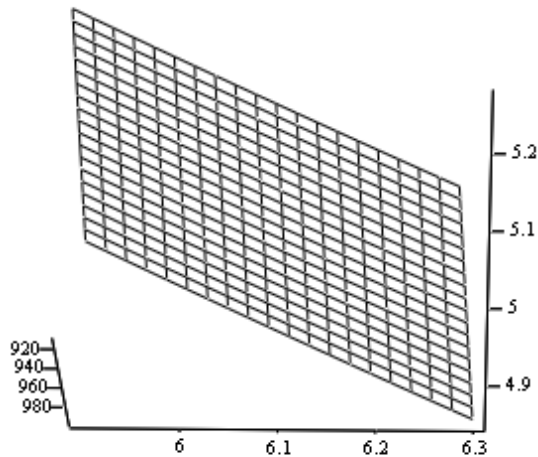
5.27
5.123
5.147
5.076
5.064
5.051
4.909
4.93
4.904
4.9

Побудова поверхні відгуку за моделлю еластичності:

$$P1 := 911 \quad P2 := 999 \quad T1 := 5.9 \quad T2 := 6.3$$

$$S(P, T) := 25.453 - 2.066 \ln(P) - 3.439 \ln(T)$$

$$C := \text{CreateMesh}(S, P1, P2, T1, T2)$$



Контрольні запитання

1. Що собою являє двофакторна модель "попит – пропозиція"?
2. Як знайти невідомі коефіцієнти рівняння (7.1)?
3. Як оцінити щільність та суттєвість зв'язку між змінними в моделі (7.1)?
4. Що собою являє модель еластичності обсягу перевезень?
5. Як здійснити прогностні оцінки за моделлю ?
6. Що відображує поверхня відгуку за моделлю (7.1) і (7.22)?
7. Які чинники впливають на обсяг перевезень, визначений за моделями "попит - пропозиція" та еластичності?

Література: [3-8, 15-17].

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Грузовые автомобильные перевозки / Воркут А. И. – 2е изд., перераб. И доп. – К.: Вища школа, 1986. –447 с.
2. Говорущенко Н. Л. Основы теории эксплуатации автомобилей. – К.: Вища школа, 1971. - 231 с.
3. Русев Г. В. Организация автомобильных перевозок. - К.: Вища школа, 1971. – 256 с.
4. Галушко В. Г. Вероятностно- статистические методы на автотранспорте. - К.: Вища школа, 1976. – 232 с.
5. Геронимус Б. Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. – М.: Транспорт, 1977. – 160 с.
6. Организация и планирование грузовых автомобильных перевозок /Под ред. Л.А. Александрова. – М.: Высш. шк., 1977. – 335 с.
7. Основы информационных систем на транспорте. Пер. с польского /Под ред. Т.Вержицкого. – М.:Транспорт, 1979. – 269 с.
8. Панов С. А. И др. Управление грузовыми автомобильными перевозками: (основы анализа). – М.: Транспорт, 1979. – 269 с.
9. Дюк В. Обработка данных на ПК в примерах. – СПб.: Питер, 1997 – 240 с.
10. Кудрявцев Е. М. Mathcad 8. – М.: ДМК, 2000. – 320 с.
11. Смирнов І. Г., Косарева Т.В. Транспортна логістика: навч. посібник. - К.: Центр уч. літ-ра, 2008. – 220 с.
12. Нефедов М. А. Логістика. Конспект лекцій. Харків: ХНАДУ, 2006 – 77 с.
13. Неруш Ю.М. Логистика: учеб. – 4 – изд. перераб. и доп. – М.: ТК Велби, изд-во Проспект, 2006. – 520 с.
14. Бауэрсокс Д. Дж., Клосс Д. Дж. Логистика. Интегрированная цепь поставок. – М.: ЗАО "Олимп – Бизнес", 2001. – 640 с.
15. Лукинский В. С. и др. Логистика автомобильного транспорта. Концепция, методы, модели. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 318 с.
16. Миротин Л. Б. Транспортная логистика: учебн. пособие.–М.:Экзамен, 2002. – 512 с.
17. Саркисов С. В. Управление логистикой: учеб. пособие. – М.; 2001. – 249 с.
18. Сивохина Н. П., Родионов В. Б., Горбунов Н. М. Логистика: учеб. пособие. – М.: НСТ; РИК Русанова, 2000. – 414 с.
19. Аллегри Т. Транспортно-складские работы / Пер. с англ. Ю. К. Трубина. – М.: Машиностроение, 1989. – 336 с.
20. Аулін В. В., Голуб Д. В. Аналіз системи перевезення пасажирів у містах, основні тенденції її розвитку і шляхи удосконалення // Вісник Національного транспортного університету.-В двох томах, № 15, частина 2.- Київ: НТУ, 2007. – С. 279-284.
21. Гаджинский А. М. Логистика: Учебник. – 7-е изд. перераб. и доп. – М.: Изд. – торг. Корп. "Дашков и Ко", 2003. – 408 с.
22. Глогусь О. Логістика: навч. посібник. – Тернопіль: Економ. думка, 1998. – 210 с.

23. Кальченко А. Г. Логістика: навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2002. – 148 с.
24. Концепція розвитку транспортно-дорожнього комплексу України на середньостраховий період та до 2010 року. – К.: 2002. – 20 с.
25. Логистика автомобильного транспорта: Учеб. пособие / В. С. Лукинский, В. И. Бережной, Е. В. Бережная и др. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 368 с.
26. Логистика: Управление в грузовых транспортно-механических системах: Учеб. пособие / Под. ред. Л. Б. Миротина. – М.: Юность, 2002. – 414 с.
27. Николайчук В. Е. Транспортно-складская логистика: Учебн. пособие. – М.: ИТК "Дашков и Ко", 2006. – 451 с.
28. Основы теории транспортных систем: Учеб. пособ. / П. Ф. Горбачев, И. А. Дмитриев. – Х.: ХНАДУ, 2002. – 212 с.
29. Редзюк А. М., Новікова А. М. Концепція Нац. програми розвитку транспортно-дорожнього комплексу України до 2015 року // Автошляховик України. – 2005. - № 8. – С. 2 – 7.
30. Смирнов И. Г. Выбор вида транспорта и перевозчика // Новый маркетинг. – 2003. - № 1. – С. 51 – 54.
31. Смирнов И. Г. Доставка по кратчайшему пути // Новый маркетинг. – 2002. - № 11. – С. 51 – 54.
32. Смирнов И. Г. Транспортная логистика как основа систем доставки товаров // Дистрибуция и логистика. – 2003. - № 3. – С. 10 – 22.
33. Логистика: обществ. пассажирский транспорт / Под. общ. ред. Л. Б. Миротина. – М.: Экзамен, 2003. – 224 с.
34. Аулін В. В., Голуб Д. В. Математичне моделювання міських пасажирських перевезень // Вестник Харьковського національного автомобільно-дорожного університету "Транспортные системы". –Харьков: ХНАДУ, 2008. – С. 106-110.
35. Аулін В. В., Голуб Д. В. Визначення раціональної кількості засобів міського пасажирського транспорту з урахуванням попиту пасажирів // Вісник Житомирського державного технологічного університету.- Житомир: ЖДТУ, 2008. – С 3-6.