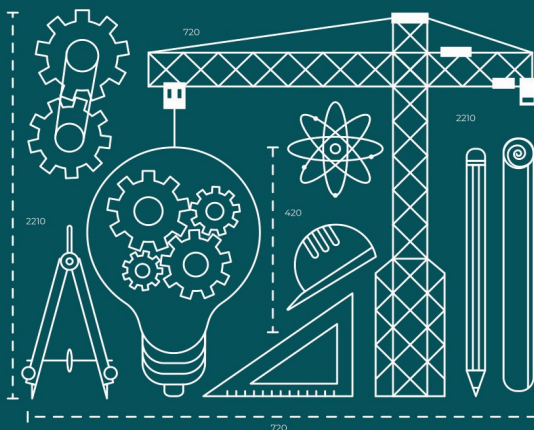


# МАТЕМАТИЧНІ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРІЇ МАТЕРІАЛІВ І ПРОЦЕСІВ



---

Лабораторний практикум з дисципліни  
для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності «Матеріалознавство»

Хмельницький національний університет

# **МАТЕМАТИЧНІ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРІЇ МАТЕРІАЛІВ І ПРОЦЕСІВ**

*Лабораторний практикум з дисципліни  
для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності 132 «Матеріалознавство»*

*Затверджено на засіданні  
кафедри трибології, автомобілів  
та матеріалознавства.  
Протокол № 9 від 09.05.2024*

Хмельницький 2024

Математичні та числові методи в інженерії матеріалів і процесів : лабораторний практикум для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 132 «Матеріалознавство» / І. В. Драч, О. В. Диха. Хмельницький : ХНУ, 2024. 88 с.

Укладачі: Драч І. В., д-р техн. наук, доц.;  
Диха О. В., д-р техн. наук, проф.

Відповідальний за випуск: Диха О. В., д-р техн. наук, проф.

Випусковий редактор: Яремчук В. С.

Технічне редагування і верстка: Чопенко О. В.

Макетування здійснено редакційно-видавничим відділом Хмельницького національного університету (м. Хмельницький, вул. Інститутська, 7/1). Підп. до друку 19.06.2024. Зам. № 79є/24, електронне видання, 2024.

© ХНУ, 2024

## Вступ

---

Дисципліна «Математичні та числові методи в інженерії матеріалів і процесів» є обов'язковою складовою загальної підготовки здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти, які навчаються за освітньо-професійними програмами в межах спеціальності 132 «Матеріалознавство» і спрямована на поглиблення теоретичної та практичної підготовки фахівця у використанні прикладних можливостей математичних і числових методів розв'язання практичних задач, а також методів і алгоритмів, які найбільш часто застосовуються в інженерних додатках для моделювання процесів вдосконалення сучасних матеріалів, технологій їх виготовлення й оброблення.

**Мета дисципліни** – формування у майбутнього фахівця в галузі матеріалознавства сучасних уявлень, теоретичних знань і практичних навичок у вирішенні складних задач та проблем, пов'язаних з розробленням, дослідженням, застосуванням, виробництвом, обробленням та випробуванням сучасних матеріалів та виробів на їх основі методами математичного моделювання й числового матеріалознавства.

**Метою лабораторних робіт** з дисципліни є формування практичних навичок з проєктування технологічних процесів, термічного та хіміко-термічного оброблення і дослідження їх результатів, розрахунку обладнання, планування термічних ділянок і дільниць з використанням сучасного комп'ютерного інструментарію.

**Завданнями дисципліни** є формування загальних та спеціальних компетентностей щодо уміння планувати та здійснювати прикладні технологічні дослідження; оволодіння навичками дослідження об'єктів та предметів виробництва; вміння використовувати автома-

тизовані системи в професійній діяльності; вміння оцінювати й узагальнювати виробничий досвід для впровадження сучасних матеріалів, технологій та прогресивної техніки відповідно до вимог ринку праці.

Лабораторні роботи з дисципліни носять практичний характер, в кожній з них стисло викладені необхідні для їх виконання основні теоретичні положення, методика проведення і завдання для самостійного виконання практичної роботи здобувачем, приклад оформлення звіту з проведеної роботи та контрольні питання для визначення ступеня засвоєння ним отриманих знань.

Вивчення дисципліни у повному обсязі сприятиме розширенню і поглибленню у здобувачів вищої освіти загальних та фахових *компетентностей* та *здатностей*, зокрема: розв'язувати складні задачі та проблеми з матеріалознавства у професійній діяльності та/або у процесі навчання, що передбачає проведення досліджень та/або здійснення інновацій та характеризується невизначеністю мов і вимог; до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; розробляти та управляти проектами; працювати автономно; працювати в команді; виявляти та ставити проблеми в сфері матеріалознавства, приймати ефективні рішення для їх вирішення; розробляти нові методи і методики досліджень, базуючись на знанні методології наукового дослідження та особливості проблеми, що вирішується; до критичного аналізу та прогнозування характеристик нових та існуючих матеріалів, параметрів процесів їх отримання і обробки та використання у виробі (або у виробничих умовах); розуміти та використовувати математичні та числові методи моделювання властивостей, явищ та процесів; застосовувати системний підхід для розв'язання прикладних задач виготовлення, обробки, експлуатації та утилізації матеріалів і виробів, а також набуття ними *результатів* навчання, передбачених освітньою програмою, зокрема: розуміти та застосовувати принципи системного аналізу, причинно-наслідкових зв'язків між значущими факторами та науковими і технічними рішеннями в контексті існуючих теорій; виявляти, формулювати і вирішувати матеріалознавчі проблеми і задачі; застосовувати сучасні інформаційні технології та спеціалізоване програмне забезпечення для розв'язання складних задач матеріалознавства; здобувати наукові навички у галузі інженерії для того, щоб успішно проводити наукові дослідження як під керівництвом так і самостійно; використовувати сучасні методи для виявлення, постановки та розв'язування винахідницьких задач в галузі матеріалознавства; планувати і виконувати експериментальні матеріалознавчі дослідження, обирати відповідні обладнання та методики, здійснювати статистичне оброблення і статистичний аналіз результатів експериментів, обґрунтовувати висновки; проєктувати нові матеріали, роз-

робляти, досліджувати та використовувати фізичні та математичні моделі матеріалів та процесів; збирати необхідну інформацію, використовуючи науково-технічну літературу, бази даних та інші джерела, аналізувати і оцінювати її.

**Загальні методичні поради.** Вивчення здобувачем теоретичного матеріалу є головною передумовою виконання лабораторної роботи. Ґрунтовно опанувавши теоретичні відомості з теми роботи, він зможе проаналізувати, зрозуміти та пояснити отримані результати. Ступінь підготовки до її виконання перевіряється шляхом усного опитування на початку заняття. Здобувач, який не засвоїв необхідного теоретичного матеріалу, до виконання роботи не допускається.

За результатами виконання лабораторної роботи складається звіт, який має містити: назву, мету роботи, вихідні дані, детальний розрахунок необхідних показників, результати та висновки з виконаної роботи. Здобувач, який не підготував звіт з лабораторної роботи, до її захисту не допускається.

Захист здійснюється на наступному занятті у формі усного опитування, що дає змогу найбільш об'єктивно виявити якість засвоєних знань та здатність здобувача до критичного мислення. Для самоконтролю знань до кожної роботи розроблено перелік питань. Здобувачі, які успішно виконали заплановані роботи та захистили їх, допускаються до підсумкового семестрового контролю з дисципліни.

Оцінювання лабораторних робіт здійснюється за інституційною чотирибальною шкалою. Оцінки «відмінно», «добре», «задовільно», «незадовільно» виставляються викладачем в електронному журналі групи в електронній мережі університету. Оцінка за лабораторний практикум є складовою підсумкової семестрової оцінки.

Оцінку **«відмінно»** отримує здобувач за грамотні, логічні і повні відповіді на контрольні запитання, якісне виконання завдань роботи та оформлення звіту (схеми, графіки, таблиці з поясненням).

Оцінку **«добре»** отримує здобувач за повні відповіді на контрольні запитання з деякими неточностями або похибками, якісне виконання завдань роботи та оформлення звіту (схеми, графіки, таблиці з поясненням).

Оцінку **«задовільно»** отримує здобувач за неповні відповіді на контрольні запитання з неточностями, похибками, якісне виконання завдань роботи та оформлення звіту (схеми, графіки, таблиці з поясненням).

Оцінку **«незадовільно»** отримує здобувач за абсолютно неправильні відповіді на контрольні запитання, неякісне виконання завдань роботи та оформлення звіту (схеми, графіки, таблиці без пояснень).

## *Лабораторна робота 1.*

### **Планування експериментів при розробленні складу високоміцного твердого сплаву для оброблення деталей, що дають зливну стружку**

---

**Мета:** освоєння методики планування багатофакторних експериментів при розробленні складу високоміцного твердого сплаву для оброблення деталей, що дають зливну стружку.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи і завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) методи випробування зразка на вигин;
- 2) межа міцності матеріалу при вигині;
- 3) теорія експерименту;
- 4) планування експерименту;
- 5) стратегія побудови математичної моделі.

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри МATHCAD.

### **Теоретичні відомості**

**Вибір чинників.** Важливою характеристикою твердих сплавів є межа міцності на вигин, оскільки такі сплави є досить крихкими й малопластичними, а тому, відповідно, характеризуються низьким опором і ударним навантаженням.

Основою більшості твердих сплавів є карбід вольфраму – WC. При цьому слід відзначити, що вольфрам є відносно дефіцитним матеріалом, тому в промисловості у багатьох випадках йдуть шляхом часткової або повної заміни WC карбідами інших тугоплавких металів, як правило, карбідами титану (TiC) і танталу (TaC). Проте ні TiC, ні TaC не забезпечують можливості повної заміни WC через відмінності у властивостях. Проте, TiC – поліпшує стійкість проти окиснювання, твердість і жароміцність сплаву; TaC – сприяє зменшенню зерна, загальмовуючи в такий спосіб рекристалізацію карбідної фази, а також зменшує здатність до зварювання матеріалу зі стружкою. На властивості сплаву має вплив і наявність ніобію (Nb), що потрапляє з руди TaC.

Тверді сплави WC–Co призначені переважно для оброблення матеріалів, що дають стружку надламу.

Важливим чинником, що впливає на межу міцності на вигин, є розмір зерна.

Передбачення властивостей міцності на вигин розроблюваного матеріалу в залежності від кожного чинника визначають за побудованою математичною моделлю.

Для цього використовують методику проведення багатофакторних експериментів. **Сутність методики багатофакторного експерименту** полягає в зміні всіх чинників за певним планом. План проведення багатофакторного експерименту складається так, щоб шляхом відповідного математичного оброблення виокремити вплив кожного чинника і, як наслідок, скласти модель складу твердого сплаву.

Вимоги до проведення багатофакторного дослідження розробки складу твердого сплаву:

– змінюваний чинник  $\epsilon$ : керованим (встановлюється експериментатором необхідне значення чинника, яке підтримується сталим протягом досліду; незалежним (встановлене значення чинника не залежить від значень інших чинників); однозначним (не є функцією інших чинників); сумісним (можливий взаємний вплив чинників не може призвести до неможливості отримання сплаву); реалізованим (межі зміни чинників забезпечують можливість їх фізичної реалізації).

– вимірювання межі міцності на вигин дозволяє: визначати межу міцності на вигин при будь-якій зміні (комбінації) чинників, і ця зміна є контрольованою; оцінювати числове значення межі міцності на вигин з високою точністю, тобто контроль межі міцності на вигин є статистично ефективним.

**Виконання вимірів.** Вибір експериментальної області роблять, виходячи з апріорної інформації.

На основі огляду літературних і патентних джерел установили верхню й нижню межу вмісту елементів, а також інтервал варіювання розмірів зерна.

Випробування на вигин проводять зосередженим навантаженням на зразок, що лежить на двох опорах (див. рис. 1.1).

Межа міцності на вигин  $\sigma_b$  визначається за формулою:

$$\sigma_b = \frac{M_{\max}}{\omega},$$

де  $M_{\max}$  – максимальний згинальний момент;

$$\omega = \frac{(bh)^2}{6} \text{ – для прямокутного перерізу зразка (} b \text{ та } h \text{ – ширина}$$

і висота зразка, відповідно);

$$\omega = \frac{(\pi d)^3}{32} \text{ – для круглого перерізу.}$$





Рис. 1.1 – Випробування на вигин

## Порядок і зміст виконання роботи

### 1. Методика виконання багатofакторного експерименту

1. Кодування чинників за формулою:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{I_i}, \quad (1.1)$$

де  $x_i$  – кодовані змінні;  $X_i$  – фізичні змінні;  $X_{i0}$  – основний рівень чинників;  $I_i$  – інтервал варіювання фізичного чинника.

Усі кодовані чинники – безрозмірні і нормовані величини. У процесі експерименту вони можуть набувати значень  $-1, 0, +1$ .

2. Вибір моделі (рівняння моделі) у методі планування експерименту – неформалізований етап, що ґрунтується зазвичай на інтуїтивних міркуваннях з урахуванням попереднього досвіду експериментатора, а кількісне визначення коефіцієнтів обраних рівнянь моделі – на результатах експерименту. Тому правильний вибір моделі має підтверджуватися експериментально.

Моделі визначається змінними  $x_i$  та сталими параметрами  $\beta_i$  і в загальному випадку має вигляд:

$$y = Y(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k).$$

У плануванні експерименту найчастіше застосовуються моделі лінійні відносно змінних  $x_i$  і параметрів  $\beta_i$ :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + y_u. \quad (1.2)$$

### 3. Побудова планів повного факторного експерименту (ПФЕ).

Повним факторним називається такий експеримент, у якому реалізуються всі можливі комбінації (набори) рівнів факторів. Якщо  $k$  факторів варіюється на двох рівнях, то кількість всіх можливих наборів –  $N_2 = 2^k$ . Якщо  $k$  факторів варіюється на трьох рівнях, то  $N_3 = 3^k$ . У повному факторному експерименті кількість дослідів дорівнює кількості різних наборів, тобто різних точок факторного простору. Зі збільшенням кількості факторів  $k$  швидко зростає кількість дослідів.

Побудова планів повного факторного експерименту зводиться до стандартної форми запису умов проведення експериментів у вигляді таблиці, у стовпчиках якої записуються всі можливі поєднання досліджуваних факторів (у кодах «+» і «-»). Позначають стовпчики змінною  $X$ , що відповідає певному фактору. До прикладу,  $X_1$  – перший чинник – вміст WC,  $X_2$  – другий чинник – вміст TiC, тощо.

Записують чинники в таблицю, починаючи із другого стовпчика (першому стовпчику завжди відповідає фіктивний чинник, позначений через  $X_0$ ). При цьому в першому стовпчику таблиці записуються всі знаки «+», у другому стовпчику необхідно змінювати знаки по чергово, у третьому чергувати через два, у четвертому – через чотири, у п'ятому – через вісім і т.д. за степенями двійки. Після того, як вичерпані всі варіанти зміни чинників, переходять до комбінацій їх взаємодій. Для цього вводять стовпчики з комбінаціями добутків чинників  $X_1 X_2, X_1 X_3, X_1 X_4, \dots, X_1 X_n, X_2 X_3, X_2 X_4, \dots, X_2 X_n, \dots, X_1 X_2 X_3, X_1 X_2 X_4, \dots, X_1 X_2 X_n, X_2 X_3 X_4, \dots, X_2 X_3 X_n, \dots, X_1 X_2 X_3 X_4, \dots, X_1 X_2 X_3 X_n, \dots$ . Оскільки змінні  $X_1, X_2, \dots, X_n$  набувають значень «+1» і «-1», то добутки змінних набудатимуть тих самих значень «+1» і «-1».

4. Після побудови плану повного факторного експерименту необхідно перевірити його властивості:

1) симетричність плану щодо центру експерименту – алгебраїчна сума елементів кожного стовпчика, крім першого, що відповідає фіктивній змінній, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N X_{i,j} = 0,$$

де  $i$  – номер дослідів (номер рядка);

$j$  – номер фактора (номер стовпця),  $j = 1, 2, \dots, k$ ;

2) нормування – сума квадратів елементів кожного стовпчика дорівнює кількості дослідів:

$$\sum_{i=1}^N X_{i,j}^2 = N,$$

3) ортогональність – сума порядкових добутоків елементів будь-яких двох стовпчиків дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N X_{i,j} \cdot X_{i,j+m} = 0,$$

де  $m$  – довільне ціле число, що задовольняє умову  $j + m < k$ .

Якщо план експерименту відповідає зазначеним властивостям, то він вважається ротатабельним, тобто математична модель, отримана у результаті експерименту з таким планом, здатна передбачити значення межі міцності при вигині з однаковою точністю в будь-яких напрямках на рівних відстанях від центру плану.

5. Проведення експерименту. Перед проведенням експерименту необхідно рандомізувати його план, тобто призначити проведення дослідів у випадковій послідовності. Для розміщення порядкових номерів дослідів у випадковій послідовності можна скористатися таблицями рівномірно розподілених випадкових величин, генератором випадкових величин або будь-яким іншим способом.

Для підвищення точності експерименту його повторюють кілька разів (не менше двох). При цьому досліді кожної серії експериментів також повинні бути рандомізовані.

6. Оброблення результатів експериментів

У ході оброблення результатів експериментів визначають:

– середнє арифметичне вимірів межі міцності на вигин за серією дослідів, тобто для кожного рядка:

$$\bar{Y}_j = \frac{Y_{i,1} + Y_{i,2} + \dots + Y_{i,t}}{T},$$

де  $t$  – номер дослідів з числа паралельних спостережень;

$T$  – кількість паралельних спостережень;

– дисперсію відтворюваності за даними  $T$  паралельних спостережень:

$$S_i^2 = \frac{(\bar{Y}_i - Y_{i,1})^2 + (\bar{Y}_i - Y_{i,2})^2 + \dots + (\bar{Y}_i - Y_{i,t})^2}{T-1};$$

– розрахункове значення критерію Кохрена:

$$G = \frac{S_{i,\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2},$$

де  $S_{i,\max}^2$  – максимальна з дисперсій відтворюваності;

$n$  – номер рядка плану;

– степені вільності  $V_1 = T - 1$ ,  $V_2 = N$ , за якими – табличне значення критерію Кохрена  $G_{кр}$  (табл. 1.1);

**Таблиця 1.1 – Числові значення розподілу Кохрена**

$V_1$	$V_2$							
	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,9985	0,9669	0,9065	0,8412	0,7808	0,7271	0,6798	0,6385
2	0,9750	0,8709	0,7679	0,6838	0,6161	0,5612	0,5157	0,4775
3	0,9392	0,7977	0,6841	0,5981	0,5321	0,4800	0,4377	0,4027
4	0,9057	0,7457	0,6287	0,5440	0,4803	0,4307	0,3910	0,3584
5	0,8772	0,7071	0,5895	0,5063	0,4447	0,3974	0,3595	0,3286
6	0,8534	0,6771	0,5598	0,4783	0,4148	0,3726	0,3362	0,3067
7	0,8332	0,6530	0,5365	0,4564	0,3980	0,3555	0,3185	0,2901
8	0,8159	0,6333	0,5175	0,4387	0,3817	0,3384	0,3043	0,2768
$V_1$	$V_2$							
	10	12	15	20	24	30	40	60
1	0,6020	0,5410	0,4709	0,3894	0,3434	0,2929	0,2370	0,1737
2	0,4450	0,3924	0,3346	0,2705	0,2354	0,1980	0,1576	0,1131
3	0,3733	0,3264	0,2758	0,2205	0,1907	0,1593	0,1259	0,0895
4	0,3311	0,2880	0,2419	0,1921	0,1656	0,1377	0,1082	0,0765
5	0,3029	0,2624	0,2195	0,1735	0,1493	0,1237	0,0968	0,0682
6	0,2823	0,2439	0,2034	0,1702	0,1374	0,1134	0,0887	0,0623
7	0,2666	0,2299	0,1911	0,1601	0,1286	0,1061	0,0827	0,0583
8	0,2541	0,2187	0,1815	0,1422	0,1216	0,1002	0,0780	0,0552

– різницю  $G - G_{кр}$  і роблять висновок про відтворюваність результатів вимірів межі міцності на вигин (якщо  $G - G_{кр} < 0$ , то вважають, що дисперсії відтворюваності однорідні й досліди відтворені). У протилежному випадку – посилюють вимоги до умов проведення експерименту й досліди проводять повторно);

– дисперсію вимірів межі міцності на вигин:

$$S^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2}{N}$$

## 2. Побудова математичної моделі

При побудові математичної моделі послідовно визначають:

– параметри моделі (коефіцієнти регресії).

Ввівши фіктивну змінну  $x_0 = +1$ , рівняння лінійної моделі зручно записувати як:

$$Y = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_r x_r + y_u. \quad (1.3)$$

Рівняння моделі (1.3) містить невідомі коефіцієнти  $\beta_i$ . Якщо ці коефіцієнти визначаються за статистичними даними, то отримуємо не точні їх значення, а статистичні оцінки.

Через випадковість величин  $y_u$  отримуємо не точне рівняння моделі, а його оцінку:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_r x_r. \quad (1.4)$$

Рівняння (1.4) називається моделлю або рівнянням регресії, а функцію  $y(x_1, \dots, x_r)$  – поверхнею або (при  $i > 2$ ) гіперповерхнею регресії.

**Метод найменших квадратів.** Для відшукування оцінок  $b_i$  застосовується метод найменших квадратів (МНК), а сама процедура відшукування називається регресійним аналізом. У задачах регресійного аналізу приймається зазвичай таке принципове допущення: всі незалежні змінні фактори  $x_1, x_2, \dots, x_k$  задаються абсолютно точно і є не випадковими величинами. Передбачається, що випадкова величина  $y_u$  розподілена за нормальним законом, а її дисперсії в окремих точках факторного простору – однорідні. При невиконанні цих умов необхідно застосувати спеціальні методи;

– дисперсію похибки визначення коефіцієнтів регресії:

$$S_b^2 = \frac{S^2}{N \cdot T};$$

– середньоквадратичне відхилення дисперсії похибки визначення коефіцієнтів регресії:

$$S_b = \sqrt{S_b^2};$$

– розрахункове значення критерію Стюдента:

$$C_j = \frac{|B_j|}{S_b};$$

– степінь вільності  $V_3 = N$  і за ним критичне значення критерію Стюдента  $C_{кр}$  (табл. 1.2);

**Таблиця 1.2 – Числові значення розподілу Стьюдента**

Число степенів вільності	$C_{кр}$	Число степенів вільності	$C_{кр}$	Число степенів вільності	$C_{кр}$
1	12,71	11	2,201	21	2,080
2	4,303	12	2,179	22	2,074
3	3,182	13	2,160	23	2,069
4	2,776	14	2,145	24	2,064
5	2,571	15	2,131	25	2,060
6	2,447	16	2,120	26	2,056
7	2,365	17	2,110	27	2,052
8	2,306	18	2,101	28	2,048
9	2,262	19	2,093	29	2,045
10	2,228	20	2,086	30	2,042
				$\infty$	1,960

– різницю  $C_j - C_{кр}$ , за якою роблять висновок про значущість коефіцієнтів регресії (якщо  $C_j - C_{кр} > 0$ , то вважають, що коефіцієнт  $B_j$  є значущим, у протилежному випадку вважають, що коефіцієнт  $B_j$  є статистично незначущим і відповідний чинник відкидають з моделі;

– математичну модель (рівняння регресії) типу:

$$Y' = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + \dots + B_rX_r,$$

де  $B_j$  – значущі коефіцієнти.

### **3. Аналіз якості моделі**

Перевірка адекватності математичної моделі складу високоміцного твердого сплаву виконується у такій послідовності:

– за рівнянням регресії визначають оцінки  $Y'_i$  для кожного рядка плану (підстановкою кодівих значень чинників  $X_{i,j}$ );

– знаходять різниці між середніми арифметичними вимірів меж міцності на вигин за серіями випробувань  $\bar{Y}_i$  і оцінками  $Y'_i$ ; розраховують дисперсії адекватності за формулою:

$$S_a^2 = \frac{[(\bar{Y}_1 - Y'_1)^2 + (\bar{Y}_2 - Y'_2)^2 + \dots + (\bar{Y}_i - Y'_i)^2] \cdot T}{N - L},$$

де  $L$  – кількість значущих коефіцієнтів (без урахування  $B_0$ );

**Таблиця 1.3 – Числові значення розподілу Фішера**

$V_a$	$V_c$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40
$I$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,71
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,56	4,46
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,77
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,44	3,34
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,15	3,05
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	2,93	2,82
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,77	2,67
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,65	2,53
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,54	2,42
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,46	2,34
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,39	2,27
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,33	2,21
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,28	2,16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,23	2,11

**Продовження таблиці 1.3**

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,19	2,07
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,15	2,02
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,12	1,99
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,09	1,96
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,20	2,07	1,93
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,04	1,91
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,02	1,89
25	4,26	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,00	1,87
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	1,99	1,85
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	1,97	1,84
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	1,96	1,81
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	1,94	1,80
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	1,93	1,71
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,75	1,59



– обчислюють розрахункове значення критерію Фішера:

$$F = \frac{S_a^2}{S^2};$$

– визначають степені вільності  $V_a = N(T - 1)$ ,  $V_c = N - L$  і за ними – табличне значення критерію Фішера  $F_{кр}$  (див. табл. 1.3);

– визначають різницю  $F - F_{кр}$  і роблять висновок про адекватність математичної моделі. Якщо  $F - F_{кр} < 0$ , то вважають, що математична модель  $Y' = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + \dots + B_lX_l$  адекватно описує склад матеріалу і нею можна користуватися для розрахунку очікуваних значень межі міцності на вигин. В іншому випадку посилюють вимоги до умов проведення експерименту і його проводять повторно;

– переходять від моделі, складеної для чинників, записаних у кодових позначеннях, до чинників, записаних у натуральних значеннях. Для цього перераховують усі коефіцієнти за формулою:

$$\tilde{B}_j = \frac{B_j}{X_{q,j}}$$

коефіцієнт  $B_0$  – за формулою:

$$\tilde{B}_0 = B_0 - \frac{X_{0,1} \cdot B_1}{X_{q,1}} - \frac{X_{0,2} \cdot B_2}{X_{q,2}} - \dots - \frac{X_{0,j} \cdot B_j}{X_{q,j}}$$

#### **4. Використання моделі:**

а) графічний аналіз; б) прогнозування.

**Дробовий факторний експеримент** (ДФЕ) відрізняється від ПФЕ тим, що дозволяє істотно скоротити кількість дослідів. У теорії планування експерименту є методи побудови частин планів ПФЕ, що мають основні властивості ортогонального планування. Такі експерименти називають дробовими. ДФЕ складає частину ПФЕ  $2^k$ . Якщо проводиться половина ПФЕ (замість  $N_2 = 2^k$  використовується половина наборів:  $1/2 N_2 = 2^{k-1}$ ), то експеримент називається напівреплікою ПФЕ; якщо використовується  $1/4 N_2 = 2^{k-2}$  наборів, то експеримент називається чвертю репліки ПФЕ  $2^k$  і т. д. Будь-які дробові репліки повинні мати властивості ортогональності, нормування та балансу. Зазвичай ці властивості виконуються, оскільки при ДФЕ спочатку будується ПФЕ для меншої кількості факторів, а потім ефекти несуттєвих (статистично незначущих) взаємодій замінюються залишковими факторами.

### Завдання

Розробити склад високоміцного твердого сплаву для оброблення деталей, що дають зливну стружку. Міцність сплаву оцінити за величиною межі міцності на вигин.

Вихідні дані завдань містяться в таблицях 1.4–1.6.

У таблиці 1.4 наведені назви, умовні позначення, нижні й верхні межі варіювання чинників для моделювання складу твердого сплаву. Таблиця 1.5 дозволяє визначити варіант експерименту: тип плану експерименту (формулу, повний або дробовий), кількість чинників (складових) і кількість серій дослідів, за якими розробляється математична модель відповідно до варіанту та підваріанта.

У таблиці 1.6 зведені значення вимірів межі міцності на вигин високоміцного твердого сплаву, призначеного для оброблення деталей, що дають зливну стружку.

**Таблиця 1.4 – Чинники процесу**

Межі варіювання чинників	Кількість карбиду, %			Кількість кобальту, %	Розмір зерна, $\mu\text{м}$	Наявність Nb
	вольфраму	титану	танталу			
	$X_1(\text{WC})$	$X_2(\text{Ti})$	$X_3(\text{Ta})$			
min	50	3	10	5	1	Немає
max	70	10	35	15	2,5	Є

**Таблиця 1.5 – Формула плану, кількість чинників і серій дослідів**

Підваріант	А	Б	В	Г	Д	Е
Формула плану	Повний $N = 2^3$	Дробовий $N = 2^{5/2}$	Дробовий $N = 2^{4/1}$	Повний $N = 2^3$	Дробовий $N = 2^{6/3}$	Дробовий $N = 2^{5/2}$
Кількість чинників	3	5	4	3	6	5
Кількість серій дослідів	2	3	2	3	2	2

**Таблиця 1.6 – Результати експериментів**

Варіант	Серії дослідів	Позначення	Результати вимірів межі міцності на вигин, $\text{кг}/\text{мм}^2$							
			1	2	3	4	5	6	7	8
<i>l</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	$Y_1$	90	103	109	125	149	175	180	190
	2	$Y_2$	88	101	110	128	150	172	178	193
	3	$Y_3$	92	100	113	130	151	175	185	189

### Продовження таблиці 1.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1	$Y_1$	88	102	110	124	148	175	183	188
	2	$Y_2$	87	98	109	125	151	177	182	193
	3	$Y_3$	91	99	110	133	153	176	187	191
3	1	$Y_1$	92	99	108	125	150	173	185	190
	2	$Y_2$	93	101	107	123	152	170	183	189
	3	$Y_3$	90	100	111	122	148	177	180	188
4	1	$Y_1$	91	99	109	125	147	170	185	191
	2	$Y_2$	92	100	111	126	149	175	186	192
	3	$Y_3$	89	98	110	120	144	173	187	190
5	1	$Y_1$	190	102	108	126	150	172	187	190
	2	$Y_2$	188	101	112	124	152	174	184	189
	3	$Y_3$	192	100	110	125	150	176	185	193

### Зміст звіту лабораторної роботи

1. Назва та мета роботи.
2. Алгоритм, програма й план експерименту.
3. Обробка результатів плану багатофакторного експерименту:
  - перевірка відновлення результатів дослідів за критерієм Кохрена (див. табл. 1.1);
  - розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії (математичної моделі);
  - оцінювання значимості коефіцієнтів регресії за допомогою критерію Стюдента (див. табл. 1.2);
  - перевірка адекватності рівняння регресії експериментальним даним за критерієм Фішера (див. табл. 1.3);
  - побудова діаграм результатів дослідження типу «Поверхня» у кодових та натуральних значеннях.

#### 4. Висновки з роботи.

**Зуваження:** скріни екрану, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені вище матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### Контрольні питання

1. Чим відрізняються багатофакторні плановані експерименти від традиційних однофакторних?
2. Що є плануванням експерименту?

3. Які об'єкти доцільно досліджувати на основі планованих багатофакторних експериментів?
4. Які вимоги висуваються до об'єктів дослідження?
5. Які вимоги висуваються до чинників, функцій відгуку та математичних моделей згідно з теорією планування експерименту?
6. Що є планом багатофакторного експерименту і які його основні особливості?
7. Які види шуканих математичних моделей використовуються в планованих експериментах?
8. Які критерії апроксимації доцільно використати при побудові багатофакторних інтерполяційних формул (математичних моделей)?
9. З якою метою і як проводиться кодування факторів?
10. Викладіть суть методу найменших квадратів.
11. Яким чином складається план багатофакторного експерименту ПФЕ 2<sup>m</sup>?

*Література:* [1, с. 105–134; 3, с. 43–46, 149–185; 4, с. 96–123]

## *Лабораторна робота 2.*

### **Оцінювання аномальності результатів вимірювань при контролі товщини дифузійного хромованого шару сталі 4x5МФ1С**

---

**Мета:** формування практичних навичок з оцінювання аномальності результатів вимірювань товщини дифузійного хромованого шару сталі 4X5МФ1С.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи та завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) визначення товщини дифузійного шару сталей і сплавів;
- 2) аномальний результат вимірювань;
- 3) алгоритм перевірки результатів вимірювань на аномальність;

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри МATHCAD.

### **Теоретичні відомості**

Під **анормальним** розуміється результат вимірювання, отриманий у результаті випадкового порушення нормальних умов експерименту або грубих помилок у вимірюваннях або розрахунках. До прикладу, при вимірюванні товщини дифузійного шару може виникнути ситуація, коли відбувається різкий стрибок результатів вимірювань. Це можна пояснити нерівномірним нагрівом деталі, нерівномірним розподілом атомарного карбюризатора по контейнеру, поганою чистотою поверхні (шорсткістю), тощо. Іноді причиною аномальності результатів вимірювань є людський чинник.

Очевидно, що аномальний результат викривить уявлення про дійсне значення товщини дифузійного шару.

Аномальний результат не належить генеральній сукупності результатів вимірювань, тому він виключається із загальної вибірки. При цьому розрахунок вибіркових характеристик для оцінювання параметрів генеральної сукупності (середнє, середньоквадратичне, дисперсія тощо) проводиться за вибіркою, з якої аномальний результат виключений.

Визначення аномальності результату вимірювання полягає в тому, що за наслідками вимірювань розраховується певна функція від випадкової величини, для якої відомий розподіл імовірності. Обчис-

лене за вибіровими даними значення цієї функції порівнюється з її граничним значенням, що відповідає заздалегідь прийнятій малій імовірності. Якщо при цьому імовірність підозрюваного в аномальності результату вимірювання менша прийнятої, то виноситься рішення про те, що оцінюваний результат аномальний і підлягає вилученню, інакше його не виключають.

Алгоритм перевірки результатів вимірювань на аномальність базується на припущенні, що аналізовані результати отримані при вимірюванні нормально розподіленої контрольованої величини. При аналізі аномальності результатів спостережень необхідно також враховувати, що прийняте рішення буде тим точнішим, чим більше інформації буде використано. Тому коли відоме генеральне середньо - квадратичне відхилення або коли воно може бути знайдене у результаті оброблення попередніх дослідів, наприклад при встановленні закону розподілу, слід користуватися критеріями, що базуються на використанні середньоквадратичного відхилення. Бажано також мати відомості про генеральне середнє.

***Виконання вимірювань товщини дифузійного шару сталей і сплавів.*** Для вимірювань товщини дифузійного шару використовують мікроскопи (рис. 2.1), які комплектуються окуляр- і об'єктив-мікрометрами.

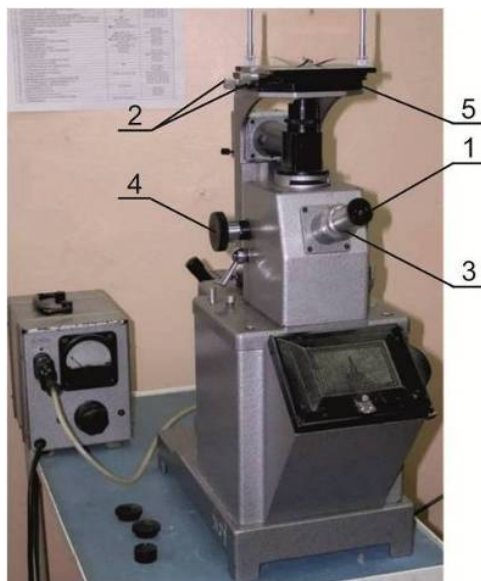


Рис. 2.1 – Мікроскоп МІМ–7

Окуляр-мікрометр є звичайний окуляр, в який вставлена (між лінзами) кругла тонка скляна пластинка з шкалою поділки 0,1 мм.

У зв'язку з тим, що збільшення мікроскопа залежить від комбінації окуляра і об'єктива, ціна поділки окуляра мікрометра залежатиме від того, в парі з яким об'єктивом розглядається в окуляр-мікрометрі мікрошліф. Тому необхідно для кожного об'єктива окремо визначити ціну поділки окуляр-мікрометра.

Об'єктив-мікрометр має скляну або металеву пластинку, на якій нанесена шкала (завдовжки, як правило, 1 мм, з поділками через 0,01 мм), рис. 2.2.

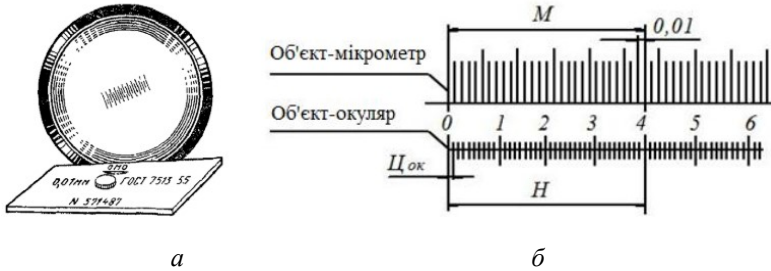


Рис 2.2 – Загальний вигляд об'єкт-мікрометра – а, схема визначення ціни поділки окуляр-мікрометра – б

Для вимірювання товщини дифузійного шару необхідно:

– налаштувати мікроскоп на заданий дифузійний шар (рис. 2.3) використовуючи макрогвинт 4 (див. рис. 2.1);

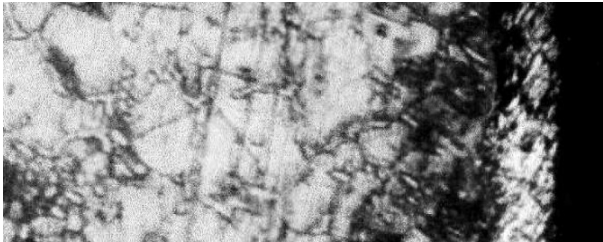
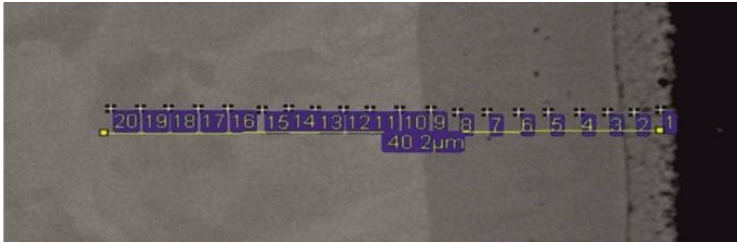


Рис. 2.3 – Мікрошліф дифузійного хромованого шару

– мікрогвинтами 2 пересувати столик для зразків 5 і сумістити вимірюваний мікроскопічний об'єкт з шкалою окуляра-мікрометра 1, який вставлений у зоровий тубус 3 (див. рис. 2.1);

– виміряти об’єкт, тобто порахувати, скільки поділок шкали окуляр-мікрометра займає об’єкт (рис. 2.4);



**Рис. 2.4 – Поперечний переріз покриттів, отриманих шляхом хромування: вимірювання глибини дифузійного шару**

– визначити величину вимірюваного об’єкта, для чого отриману кількість поділок шкали окуляр-мікрометра, яку займає об’єкт, помножити на ціну поділок окуляр-мікрометра.

### Порядок і зміст виконання роботи

**2.1.** Методика виконання оцінювання аномальності результатів вимірювань при відомому генеральному середньоквадратичному відхиленні  $S$  і відомому генеральному середньому  $X_{сер}$ .

1. Визначити відношення:

$$V_i = \frac{|X_i - X_{сер}|}{S},$$

де  $X_i$  – результат вимірювання, підозрюваний в аномальності.

2. Розрахункове значення  $V_i$  порівняти з критичним  $h_1$ : якщо  $V_i \geq h_1$ , то припускають, що результат  $X_i$  не належить до заданої нормальної сукупності та його можна виключити; якщо  $V_i < h_1$ , то аналізований результат вважається нормальним.

Числові значення критерію  $h_1$  при 5 % імовірності ухвалення помилкового рішення подані в таблиці 2.1.

**Таблиця 2.1 – Числові значення критерію  $h_1$  при рівні значущості 0,05**

$n$	$h_1$	$n$	$h_1$	$n$	$h_1$	$n$	$h_1$
3	2,121	7	2,442	11	2,705	15	3,015
4	2,234	8	2,490	12	2,799	16	3,082
5	2,319	9	2,531	13	2,870	17	3,285
6	2,386	10	2,568	14	2,928	18	3,534



3. Розрахувати вибірккові характеристики за вибіркою, з якої аномальні результати виключені.

**2.2.** Методика виконання оцінювання аномальності результатів вимірювань при апріорно невідомому генеральному середньоквадратичному відхиленні  $S$  і відомому генеральному середньому  $X_{сер}$ .

1. Розрахувати вибірккові характеристики:

$$X_{сер} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n};$$

$$S = \sqrt{\frac{(X_1 - X_{сер})^2 + (X_2 - X_{сер})^2 + \dots + (X_n - X_{сер})^2}{n - 1}},$$

де  $n$  – кількість вимірювань.

2. Визначити відношення

$$W_i = \frac{|X_i - X_{сер}|}{S}.$$

Розрахункове значення  $W_i$  порівняти з критичним  $h_2$ : якщо  $W_i \geq h_2$ , то результат  $X_i$  виключається; інакше –  $X_i$  вважається нормальним.

Критичні значення  $h_2$  наведені в таблиці 2.2.

**Таблиця 2.2 – Числові значення критерію  $h_2$  при рівні значущості 0,05**

$n$	$h_2$	$n$	$h_2$	$n$	$h_2$	$n$	$h_2$	$n$	$h_2$	$n$	$h_2$
3	1,15	7	1,94	11	2,23	15	2,41	19	2,53	23	3,02
4	1,46	8	2,03	12	2,29	16	2,44	20	2,56	24	3,08
5	1,67	9	2,11	13	2,33	17	2,48	21	2,87	25	3,29
6	1,82	10	2,18	14	2,37	18	2,50	22	2,93	26	3,53

3. Розрахувати вибірккові характеристики за вибіркою, з якої аномальні результати виключені.

### **Завдання**

1. Оцінити, чи є результати визначення товщини хромованого шару аномальними при апріорно відомих  $S$  та  $X_{сер}$ , для результатів вимірювань поданих у таблиці 2.3.

2. Оцінити, чи є результати визначення товщини хромованого шару аномальними при відомих  $S$  і  $X_{сер}$ , для результатів вимірювань поданих у таблиці 2.4.

**Таблиця 2.3 – Результати вимірювань товщини дифузійного шару, отриманого для різних режимів хромування сталі 4X5MФ1С, мм**

Варіант	$X_{сер}$	$S$	Номер випробування							
			1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,03	0,01	0,02	0,025	0,04	0,03	0,04	0,02	0,08	0,03
2	0,12	0,02	0,1	0,11	0,12	0,1	0,15	0,13	0,2	0,13
3	0,07	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0,08	0,06	0,08	0,07
4	0,015	0,01	0,019	0,02	0,016	0,018	0,03	0,02	0,03	0,04
5	0,1	0,05	0,1	0,15	0,12	0,13	0,1	0,1	0,12	0,1

**Таблиця 2.4 – Результати вимірювань товщини хромованого шару сталі 4X5MФ1С, мм (950 °С, 8 год)**

Варіант	Номер випробування									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,02	0,025	0,04	0,03	0,04	0,02	0,08	0,03	0,03	0,04
2	0,1	0,11	0,12	0,1	0,15	0,13	0,12	0,13	0,11	0,1
3	0,06	0,1	0,06	0,07	0,08	0,06	0,08	0,07	0,07	0,08
4	0,019	0,02	0,016	0,018	0,03	0,02	0,03	0,03	0,015	0,016
5	0,1	0,15	0,12	0,13	0,1	0,1	0,12	0,1	0,2	0,15

### **Зміст звіту лабораторної роботи**

1. Назва та мета роботи.
2. Оброблення результатів вимірювань товщини дифузійного шару, отриманого для різних режимів хромування сталі 4X5MФ1С:
  - перевірка аномальності результатів вимірювань при апріорно відомих  $S$  і  $X_{сер}$ ;
  - перевірка аномальності результатів вимірювань при невідомих  $S$  і  $X_{сер}$ ;
  - розрахунок вибіркової характеристики за вибіркою, з якої аномальні результати виключені;
3. Висновки з роботи.

**Зауваження:** скріни екрана, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### **Контрольні питання**

1. Що є аномальним результатом вимірювань?

2. Що є критерієм оцінювання аномальності результатів спостережень за невідомого генерального середньоквадратичного відхилення?

3. Що є критерієм оцінювання аномальності результатів спостережень при відомому генеральному середньоквадратичному відхиленні та невідомому середньоквадратичному відхиленні?

4. Що є критерієм оцінювання аномальності результатів спостережень при відомому генеральному середньоквадратичному відхиленні та відомому середньоквадратичному відхиленні?

5. Що є критерієм оцінювання аномальності результатів спостережень за модулем їхнього відхилення від середнього?

6. Який зміст оброблення результатів спостережень з багатьох вибірок?

7. Робастні методи оброблення результатів вимірювань.

*Література:* [1, с. 64–69, 139–140; 4, с. 123–131]

### *Лабораторна робота 3.*

## **Визначення оцінок і довірчих меж для параметрів нормального розподілу при вимірюванні твердості сталі**

---

**Мета:** формування практичних навичок із застосування методики визначення оцінок і довірчих меж для параметрів нормального розподілу при контролі твердості сталі.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи та завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) що є твердістю металу або сплаву;
- 2) класифікація методів вимірювання твердості;
- 3) зміст вимірювання твердості за Брінеллем;
- 4) запис твердості за Брінеллем;
- 5) властивості і характеристики нормального розподілу випадкових похибок;
- 6) довірчі границі випадкових похибок.

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

### **Теоретичні відомості**

Дослідженнями в галузі термооброблення встановлено, що більшість вимірювань різних характеристик оброблених виробів є випадковими величинами і підкоряються нормальному закону розподілу. Тому важливо знати методи визначення оцінок результатів таких вимірювань і довірчі інтервали, в межах яких ці оцінки є обґрунтованими, незміщеними і ефективними.

**Виконання вимірювань твердості металів і сплавів.** Твердістю матеріалу називають здатність чинити опір механічному проникненню в його поверхневий шар іншого твердого тіла. Твердість є однією з найбільш важливих характеристик продукції і контролюється, як правило, на всіх етапах термічного оброблення.

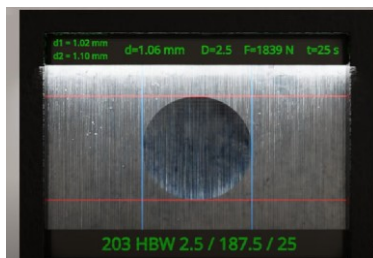
Для визначення твердості в поверхню матеріалу з певною силою вдавлюється тіло (індентор), виконане у вигляді сталеві кульки, діамантового конуса, піраміди або голки. За розмірами отриманого на поверхні відбитку роблять висновок про твердість матеріалу. Залежно від способу вимірювання твердості матеріалу кількісно її ха-

рактизують числом твердості за Брінеллем (HB), Роквелем (HRC) або Віккерсом (HV).

Твердість за методом Брінелля (ДСТ 9012–59) вимірюють втискуванням у випробовуваний зразок сталеві кульки певного діаметра  $D$  під дією заданого навантаження  $P$  протягом певного часу (рис. 3.1). В результаті втискування кульки на поверхні зразка з'являється відбиток (лунка). Показник твердості за Брінеллем, HB, є відношенням навантаження  $P$  до площі поверхні сферичного відбитку  $F$  і вимірюється в кгс/мм<sup>2</sup>, або МПа (рис. 3.2). Метод Брінелля не рекомендовано застосовувати для матеріалів з твердістю більшою 450 HB, оскільки сталеві кульки можуть деформуватися, що внесе похибку до результатів випробувань.



*a*



*б*



*б*



*г*

**Рис. 3.1 – Випробування на твердість за Брінеллем: індентор-кулька (*a*), відбиток – лунка (*б*); вимірювання діаметра лунки (*в*); сферична лунка (*г*)**

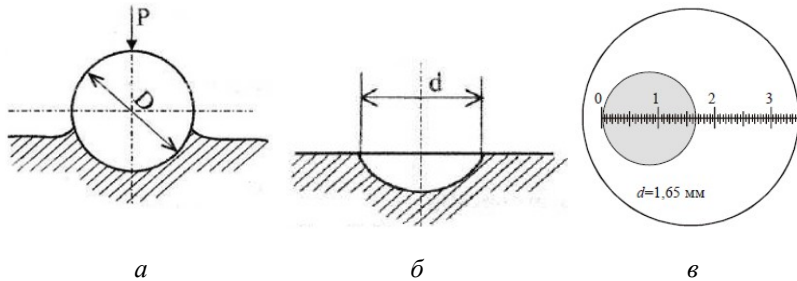


Рис. 3.2 – Вигляд деформованого зразка після вдавлення кульки: лунка (а), відбиток (б); зображення відбитка (в)

### Порядок і зміст виконання роботи

1 Розрахувати вибіркове середнє арифметичне (оцінка математичного очікування):

$$X_{\text{сер}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

де  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – результати вимірювання контрольованого параметра.

2. Розрахувати дисперсію:

$$D = \frac{(X_1 - X_{\text{сер}})^2 + (X_2 - X_{\text{сер}})^2 + \dots + (X_n - X_{\text{сер}})^2}{n - 1},$$

вибіркове середньоквадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{(X_1 - X_{\text{сер}})^2 + (X_2 - X_{\text{сер}})^2 + \dots + (X_n - X_{\text{сер}})^2}{n - 1}}.$$

3. Визначити граничне відхилення для вибіркового середнього арифметичного:

$$\zeta = \frac{t_\varphi \cdot S}{\sqrt{n}},$$

де  $t_\varphi$  – квантіль нормального розподілу (визначається з табл. 3.1 для відомих  $n$  та  $\varphi$  (для матеріалознавчих розрахунків, як правило, приймають  $\varphi = 0,95$  – довірна імовірність)).

4. Розрахувати:

– нижню довірчу межу вибіркового середнього арифметичного:

$$X_n = X_{сер} - \zeta;$$

– верхню довірчу межу вибіркового середнього арифметичного:

$$X_n = X_{сер} + \zeta.$$

5. Розрахувати:

– нижню довірчу межу середнього квадратичного відхилення:

$$\alpha_n = Z_n \cdot S,$$

де  $Z_n$  – табличне значення (табл. 3.1);

– верхню довірчу межу середнього квадратичного відхилення:

$$\alpha_e = Z_e \cdot S,$$

де  $Z_e$  – табличне значення (табл. 3.1).

**Таблиця 3.1 – Числові значення функції  $t_\phi$  і меж інтервалу  $Z_n, Z_e$**

Значення $t_\phi, Z_n, Z_e$ при довірчій імовірності 0,95											
$n$	$t_\phi$	$n$	$t_\phi$	$n$	$Z_n$	$n$	$Z_n$	$n$	$Z_e$	$n$	$Z_e$
2	6,314	10	1,833	2	–	10	0,729	2	–	10	1,65
3	2,920	15	1,761	3	0,578	15	0,769	3	4,42	15	1,46
4	2,353	20	1,729	4	0,620	20	0,794	4	2,92	20	1,37
5	2,132	25	1,711	5	0,649	25	0,812	5	2,37	25	1,32
6	2,015	30	1,699	6	0,672	30	0,828	6	2,09	30	1,27
7	1,943	40	1,684	7	0,690	40	0,847	7	1,92	40	1,23
8	1,895	50	1,676	8	0,705	50	0,861	8	1,80	50	1,20
9	1,859	100	1,671	9	0,718	100	0,869	9	1,71	100	1,18

### **Завдання**

За результатами вимірювання твердості за методом Брінелля заданого матеріалу – сталі після попереднього термічного оброблення (табл. 3.2).

Визначити статистичні оцінки результатів вимірювань і довірчі інтервали, в межах яких зазначені оцінки є незміщеними та ефективними.

**Таблиця 3.2 – Результати вимірювань твердості сталі після попереднього термічного оброблення (за Брінеллем), НВ**

<b>Варіант 1</b> (сталь Х12ВМ)									
А	255	248	251	255	252	250	253	254	254
Б	252	249	250	253	254	248	255	255	255
В	251	255	249	254	253	255	253	255	253
Г	250	253	253	255	254	253	254	253	254
Д	254	250	254	255	255	254	255	255	255
Е	255	249	250	251	252	255	255	253	254
<b>Варіант 2</b> (сталь Х6ВФ)									
А	241	241	241	241	241	240	240	239	239
Б	240	240	240	239	239	241	238	241	240
В	239	239	239	238	238	239	239	241	241
Г	238	240	238	240	240	241	240	240	239
Д	240	241	241	239	238	239	240	239	238
Е	241	239	238	240	241	240	239	241	238
<b>Варіант 3</b> (сталь 9ХВГ)									
А	241	241	241	241	241	240	240	240	239
Б	240	240	240	238	239	241	238	241	240
В	239	239	239	238	238	239	239	241	240
Г	238	240	238	240	240	241	240	240	238
Д	240	241	241	239	238	239	241	239	238
Е	241	239	238	240	240	240	239	241	238
<b>Варіант 4</b> (сталь 5ХНМ)									
А	241	237	241	241	241	240	240	239	239
Б	240	240	240	239	239	241	238	241	242
В	239	239	239	241	238	239	239	241	241
Г	238	241	238	240	240	241	240	240	239
Д	240	241	241	239	237	239	240	239	238
Е	241	239	238	240	241	240	239	241	239
<b>Варіант 5</b> (сталь 4ХМФС)									
А	240	237	241	241	241	240	240	239	239
Б	240	240	240	241	239	241	238	241	242
В	239	237	239	241	238	239	239	241	241
Г	238	241	238	240	240	241	242	240	239
Д	240	241	240	239	237	238	240	239	238
Е	241	239	238	241	241	241	239	241	239



## Зміст звіту лабораторної роботи

1. Назва та мета роботи.
2. Оброблення результатів вимірювань твердості сталі після попереднього термічного оброблення за Брінеллем:
  - визначення довірчих меж вибіркового середнього арифметичного (оцінки математичного сподівання);
  - визначення довірчих меж вибіркового середнього квадратичного відхилення (оцінки  $\sigma$ );
3. Висновки з роботи.

**Зауваження:** скріни екрану, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

## Контрольні питання

1. Охарактеризуйте методи та способи вимірювання величин технічних показників об'єктів дослідження.
2. Які вимоги висуваються до точності вимірювань?
3. Визначте основні статистичні характеристики.
4. Охарактеризуйте зміст методів перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу статистичної вибірки.
5. Означення і властивості статистичних оцінок.

**Література:** [1, с. 36–44, 135–139; 4, с. 173–179]

#### *Лабораторна робота 4.*

### **Розрахунок параметрів дослідного розподілу й оцінювання достовірності впливу термічного оброблення на твердість хромованого шару сталі**

---

**Мета:** формування практичних навичок із застосування методик розрахунку основних параметрів дослідного розподілу й оцінювання достовірності впливу операцій термічного оброблення виробу на твердість заздалегідь отриманого хромованого шару сталі.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи та завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) твердість хромованого шару сталей і сплавів;
- 2) аномальний результат вимірювань;
- 3) алгоритм перевірки результатів вимірювань на аномальність;

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

#### **Теоретичні відомості**

Для підвищення твердості серцевини і поліпшення її механічних властивостей хромовані деталі машин, як правило, піддають термічному обробленню (гартуванню, відпуску). При цьому термічне оброблення, в більшості випадків, не повинне істотно впливати на властивості поверхневого шару, оскільки може призвести до його небажаних змін.

Встановлення факту і ступеня зміни експлуатаційних характеристик (або відсутність змін) при виконанні операцій термооброблення, як правило, здійснюється в умовах недостатності статистичної інформації, що пов'язано з великими витратами на проведення статистичних досліджень.

Звичайним є випадок, коли оцінювання змін експлуатаційних характеристик необхідно здійснювати навіть при невідомому законі розподілу отримуваних статистичних даних.

Через зазначені причини виявлення факту залежності між проведенням термічного оброблення деталі та твердістю хромованого шару сталі здійснюється за оцінками фактично отриманого розподілу параметрів експлуатаційних характеристик з визначенням достовірності впливу виконаних робіт. Достовірність оцінюється шляхом по-

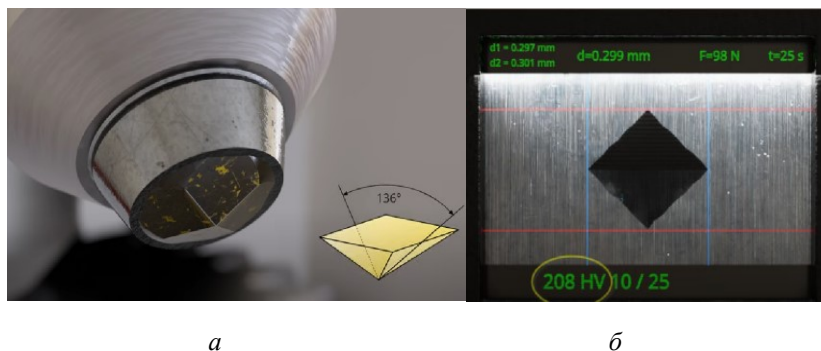
рівняння двох вибірок вимірних параметрів експлуатаційних характеристик, отриманих до проведення термічного оброблення та після його завершення. Такі дослідження дозволяють виявити зміну твердості отриманого хромованого шару деталі, яка може відбутися унаслідок термічного оброблення.

Крім визначення і порівняння параметрів розподілу значень твердості хромованого шару, отриманих до і після термічного оброблення, методика дає можливість оцінити достовірність самого факту зміни твердості і порівняти точність експериментальних методик, за допомогою яких визначалися значення твердості.

***Виконання вимірювань твердості хромованого шару виробу.***

Твердість хромованого шару вимірюють за методом Віккерса.

При випробуванні на твердість за Віккерсом в поверхню матеріалу вдавлюється діамантова чотиригранна піраміда з кутом при вершині  $136^\circ$  (рис. 4.1).



**Рис. 4.1 – Випробування на твердість за Віккерсом: індентор-піраміда (а), вимірювання діагоналей відбитка – лунки (б)**

Після зняття навантаження втискування вимірюється діагональ відбитку  $d$  (рис. 4.2). Число твердості за Віккерсом HV підраховується як відношення навантаження до площі поверхні пірамідального відбитку. Число твердості за Віккерсом позначається символом HV із зазначенням навантаження  $P$  і часу витримки під навантаженням, причому розмірність числа твердості ( $\text{кгс}/\text{мм}^2$ ) не ставиться. Тривалість витримки індентора під навантаженням приймають для сталей 10–15 с, а для кольорових металів – 30 с.

Переваги методу Віккерса в порівнянні з методом Брінелля полягають у тому, що методом Віккерса можна випробовувати матеріали більшої твердості завдяки застосуванню діамантової піраміди.

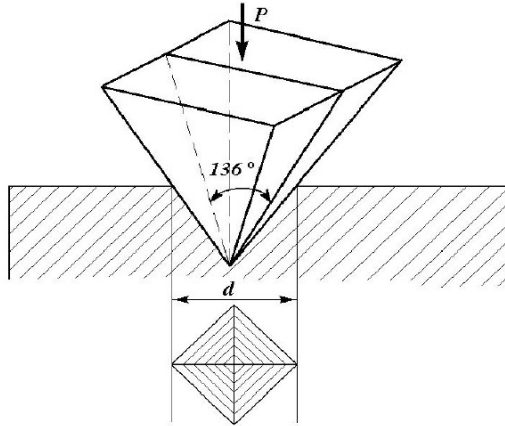


Рис. 4.2 – Вигляд деформованого зразка після вдавлювання піраміди

### Порядок і зміст виконання роботи

Дослідження виконується за двома вибірками, отриманими при вимірюванні твердості до і після проведення термічного оброблення хромованої деталі. Параметри фактичних розподілів визначаються для кожної з вибірок, а висновки про достовірність впливу виконаних робіт на твердість хромованого шару робляться при порівнянні розрахованих параметрів розподілів.

1. Для кожної вибірки вимірів обчислити розмах значень твердості хромованого шару сталі:

$$R = HV_{\max} - HV_{\min},$$

де  $HV_{\max}$ ,  $HV_{\min}$  – відповідно найбільше і найменше вимірне значення твердості.

2. Розбити загальний розмах значень твердості (визначений за двома вибірками) на 6 інтервалів і визначити частоти появи значень твердості в кожному з інтервалів (кількість значень твердості хромованого шару, які знаходяться в межах кожного з інтервалів). За знайденими значеннями частот побудувати графік в координатах частоти – інтервали.

3. Для кожної вибірки вимірів визначити моду – найбільше значення твердості, що часто повторюється, в інтервалах даних. Мода чисельно дорівнює значенню твердості, яке відповідає середині інтервалу з найбільшою частотою появи значення твердості.

4. Для кожної вибірки вимірів визначити медіану числових рядів значень твердості з умови рівності кількості значень, розміщених на числовій осі зліва і справа від медіан.

5. Для кожної вибірки вимірів розрахувати середнє арифметичне значення твердості:

$$HV_{\text{сеп}} = \frac{\sum_{i=1}^n HV_i}{n}$$

де  $HV_i$  –  $i$ -й результат визначення твердості хромованого шару сталі;

$n$  – загальна кількість вимірювань твердості.

6. Для кожної вибірки вимірів розрахувати дисперсію значень твердості хромованого шару деталі:

$$HV_{\text{сеп}}^2 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n HV_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n HV_i \right)^2}{n \cdot (n-1)}$$

7. Для кожної вибірки вимірів розрахувати середньоквадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{n \cdot \sum_{i=1}^n HV_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n HV_i \right)^2}{n \cdot (n-1)}}$$

8. Порівняти точність експериментальних методик, використаних для визначення значень твердості хромованого шару до і після термічного оброблення. При цьому якщо виконується відношення:

$$\frac{D_{\text{max}}}{D_{\text{min}}} < [D],$$

де  $D_{\text{max}}$ ,  $D_{\text{min}}$  – відповідно найбільше значення і найменше значення дисперсій, розрахованих для значень твердості шару до або після проведення термічного оброблення;

$[D]$  – табличне значення критерію Фішера (визначається з таблиці 4.1 відповідно для кількості експериментів  $n_1$ , проведених в дослідженнях з найбільшою дисперсією і кількості експериментів  $n_2$  з найменшою дисперсією  $V_c = n_1$ ,  $V_a = n_2$ ).

**Таблиця 4.1 – Значення критерію Фішера  
(для 5 % імовірного рівня допустимої похибки)**

$V_a$	$V_c$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,71
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,56	4,46
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,77
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,44	3,34
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,15	3,05
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	2,93	2,82
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,77	2,67
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,65	2,53
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,54	2,42
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,46	2,34
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,39	2,27
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,33	2,21
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,28	2,16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,23	2,11
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,19	2,07
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,15	2,02
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,12	1,99
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,09	1,96
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,20	2,07	1,93
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28	2,04	1,91
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,02	1,89
25	4,26	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,00	1,87
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	1,99	1,85
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	1,97	1,84
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	1,96	1,81
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	1,94	1,80
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	1,93	1,71
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,75	1,59

Вважаємо, що експерименти виконані в однакових умовах і можна робити порівняння отриманих результатів.

9. Для кожної вибірки вимірів розрахувати середнє геометричне значення твердості:

$$HV_{\text{сеп,г}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n HV_i}$$

10. Для кожної вибірки вимірів розрахувати середню похибку середнього арифметичного:

$$\Delta HV_{cep} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

11. Для кожної вибірки вимірів розрахувати коефіцієнт варіації (у відсотках):

$$K_{var} = \frac{S}{HV_{cep}} \cdot 100\%.$$

12. Розрахувати коефіцієнт достовірності відмінності значень твердості до і після проведення термічного оброблення:

$$K_o = \frac{|HV'_{cep} - HV''_{cep}|}{\sqrt{\frac{\Delta'_{sum} + \Delta''_{sum}}{n' + n''} \cdot \frac{n' + n''}{n' \cdot n''}}},$$

де  $HV'_{cep}$ ,  $HV''_{cep}$ ,  $\Delta'_{sum}$ ,  $\Delta''_{sum}$  – статистичні характеристики для значень твердості до і після проведення термічного оброблення:

$$\Delta_{sum} = \sum_{i=1}^n HV_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n HV_i\right)^2}{n};$$

тут  $n'$ ,  $n''$  – кількість вимірювань твердості, виконаних до і після проведення термічного оброблення (може бути різним).

13. Розрахувати степені вільності для коефіцієнта достовірності відмінності значень твердості:

$$V_3 = n' + n'' - 2.$$

14. За таблицю 4.2 необхідно визначити граничне значення для коефіцієнта достовірності відмінності значень твердості хромованого шару  $C_k$ .

15. Оцінити достовірність впливу проведення термічного оброблення на твердість хромованого шару сталі за співвідношенням між  $K_o$  та  $C_k$ : якщо  $K_o < C_k$ , то робимо висновок про відсутність впливу термічного оброблення на твердість хромованого шару деталі; якщо  $K_o \geq C_k$ , то вважаємо, що існування такого впливу встановлено.

**Таблиця 4.2 – Значення критерію Стьюдента  
(для 5 % імовірного рівня допустимої похибки)**

$V_3$	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_K$	4,3027	3,1824	2,7764	2,5706	2,4469	2,3646	2,3060	2,2622
$V_3$	10	11	12	13	14	15	16	17
$C_K$	2,2281	2,2010	2,1768	2,1604	2,1448	2,1314	2,1199	2,1098
$V_3$	18	19	20	21	22	23	24	25
$C_K$	2,1009	2,0930	2,0860	2,0796	2,0739	2,0687	2,0639	2,0595
$V_3$	26	27	28	29	30	32	34	36
$C_K$	2,0590	2,0518	2,0484	2,0452	2,0423	2,0360	2,0322	2,0281
$V_3$	38	40	42	44	46	48	50	55
$C_K$	2,0244	2,0211	2,0180	2,0154	2,0129	2,0106	2,0086	2,0040
$V_3$	60	65	70	80	90	100	150	200
$C_K$	2,0003	1,9970	1,9944	1,9900	1,9867	1,9840	1,9799	1,9759

### **Завдання**

Результати вимірювання твердості хромованого шару виробу із сталі 4X5MФ1С, наведені в таблицях 4.3 та 4.4.

У таблицю 4.3 зведені результати контролю твердості хромованого шару сталі до проведення термічного оброблення виробу. У таблиці 4.4 подано результати, отримані після гартування і відпуску.

**Таблиця 4.3 – Вимірювання твердості (HV) хромованого шару виробу  
зі сталі 40X13 до проведення операцій термічного оброблення**

1	2	3	4	5	6	7	8
6,4	1500	1580	1600	1550	1530	1550	1500
9	10	11	12	13	14	15	
1550	1600	1530	1570	1550	1600	1520	

**Таблиця 4.4 – Вимірювання твердості (HV) хромованого шару виробу  
зі сталі 40X13 після проведення операцій термічного оброблення  
(гартування 1050°, відпуск 750 °)**

<b>Варіант 1</b>										
Інтервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1–10	1500	1580	1600	1530	1550	1500	1550	1600	1530	1500
11–20	1500	1580	1600	1530	1550	1500	1550	1600	1530	1500
21–30	1530	1550	1600	1560	1500	1520	1550	1600	1580	1530
31–40	1520	1550	1530	1550	1520	1600	1520	1550	1600	1520
41–50	1500	1500	1530	1600	1550	1590	1600	1550	1520	1530
51–60	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
61–70	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
71–80	1580	1560	1560	1550	1560	1600	1600	1550	1600	1540
81–90	1500	1550	1550	1550	1600	1540	1500	1500	1530	1540



**Продовження таблиці 4.4**

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
<b>Варіант 2</b>										
1–10	1600	1520	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540
11–20	1580	1560	1560	1550	1560	1600	1600	1550	1600	1540
21–30	1500	1500	1530	1600	1550	1590	1600	1550	1520	1530
31–40	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
41–50	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
51–60	1500	1580	1600	1530	1550	1500	1550	1600	1530	1500
61–70	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
71–80	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
81–90	1580	1560	1560	1550	1560	1600	1600	1550	1600	1540
<b>Варіант 3</b>										
1–10	1500	1580	1600	1530	1550	1500	1550	1600	1530	1500
11–20	1520	1550	1530	1550	1520	1600	1520	1550	1600	1520
21–30	1500	1580	1600	1530	1550	1500	1550	1600	1530	1500
31–40	1500	1580	1600	1530	1550	1500	1550	1600	1530	1500
41–50	1530	1550	1600	1560	1500	1520	1550	1600	1580	1530
51–60	1520	1550	1530	1550	1520	1600	1520	1550	1600	1520
61–70	1500	1500	1530	1600	1550	1590	1600	1550	1520	1530
71–80	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
81–90	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
<b>Варіант 4</b>										
1–10	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
11–20	1580	1560	1560	1550	1560	1600	1600	1550	1600	1540
21–30	1500	1550	1550	1550	1600	1540	1500	1500	1530	1540
31–40	1500	1500	1530	1600	1550	1590	1600	1550	1520	1530
41–50	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
51–60	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
61–70	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
71–80	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
81–90	1500	1500	1530	1600	1550	1590	1600	1550	1520	1530
<b>Варіант 5</b>										
1–10	1580	1560	1560	1550	1560	1600	1600	1550	1600	1540
11–20	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
21–30	1580	1560	1560	1550	1560	1600	1600	1550	1600	1540
31–40	1500	1550	1550	1550	1600	1540	1500	1500	1530	1540
41–50	1500	1500	1530	1600	1550	1590	1600	1550	1520	1530
51–60	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
61–70	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600
71–80	1550	1530	1530	1560	1550	1550	1600	1540	1500	1600
81–90	1530	1600	1550	1540	1530	1600	1530	1550	1520	1600

Визначити вплив виконаних термічних робіт на значення твердості хромованого шару сталі статистичним методом.

### **Зміст звіту лабораторної роботи**

1. Назва та мета роботи.
2. Оброблення результатів вимірювань мікротвердості хромованого шару виробу зі сталі 40X13, отриманих до проведення операцій термічного оброблення.
3. Оброблення результатів вимірювань мікротвердості хромованого шару виробу зі сталі 40X13 після проведення операцій термічного оброблення: гартування 1050°, відпуск 750°.
4. Визначити вплив виконаних термічних робіт на значення мікротвердості хромованого шару сталі статистичним методом.
5. Висновки з роботи.

**Зауваження:** скріни екрана, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені вище матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### **Контрольні питання**

1. Дати визначення, що називають твердістю?
2. Чим твердість відрізняється від мікротвердості?
3. Описати існуючі методи визначення мікротвердості.
4. Записати як визначають значення мікротвердості?
5. Доведіть чому за змінами твердості матеріалу можливо досліджувати вплив виконаних термічних робіт на значення мікротвердості хромованого шару сталі.
6. Детально описати принцип дії і схему статистичного методу оцінювання достовірності факту зміни мікротвердості в залежності від виконаних термічних робіт.
7. Описати принцип дії і схему статистичного методу порівняння точності експериментальних методик, за допомогою яких визначалися значення мікротвердості.

**Література:** [1, с. 69–75, 78–82, 142–149; 4, с. 179–194]

## Лабораторна робота 5.

### Визначення закону розподілу випадкової величини при вимірюванні твердості сталі

---

**Мета:** формування практичних навичок із застосування методики перевірки узгодженості емпіричного і теоретичного розподілу при контролі твердості.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи і завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) що є твердістю металу або сплаву;
- 2) класифікація методів вимірювання твердості;
- 3) зміст вимірювання твердості за Роквеллом;
- 4) запис твердості за Роквеллом;
- 5) властивості і характеристики закон розподілу контрольованої випадкової величини;
- 6) процедура встановлення закону розподілу випадкової величини;
- 7) процедура перевірки узгодженості емпіричного та теоретичного законів розподілу випадкової величини.

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесору Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

### Теоретичні відомості

Після остаточного термічного оброблювання деталей згідно із технічними умовами креслення контролюється твердість серцевини, а при проведенні хіміко-термічного оброблення, твердість і глибина поверхневого шару. При такому контролі твердості виготовлених деталей, як правило, використовують нормальний закон розподілу вимірюваних величин. У деяких випадках це виправдано, оскільки встановлено, що в машинобудуванні і матеріалознавстві більшість випадкових процесів підкоряються нормальному закону розподілу. Однак, існують процеси, які не підкоряються цьому розподілу, і застосування до них оцінок, що відповідають нормальному закону розподілу, призводить до істотних похибок. Середнє значення при розподілах, що не підкоряються нормальному закону, обчислюється за формулами, відмінними від традиційної формули:

$$X_{\text{сеп}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Тому для визначенням оцінок випадкових величин, використовуваних у різних теоретико-ймовірнісних розрахунках, доцільно заздалегідь встановити закон розподілу контрольованої випадкової величини.

Процедура встановлення закону розподілу випадкової величини полягає в отриманні впорядкованого ряду результатів спостережень цієї величини  $X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \dots \leq X_n$ , побудові за ним функції накопичених частот (комулят) і порівнянні цієї функції із заданою теоретичною функцією.

Спостереження випадкової величини  $X$  повинні проводитись в практично однакових умовах, досліджувана сукупність має бути однорідною. Порушення вимог однорідності може призвести до помилкових висновків. Кількість спостережень випадкової величини для перевірки узгодженості емпіричного і теоретичного розподілів має бути більшою за 50, якщо використовується  $\omega$ -критерій, більшою за 100 – якщо використовується критерій Колмогорова (або будь-який інший критерій). Для вимірювання необхідно застосувати засоби вимірювання з ціною поділки, що не перевищує 1/5 передбачуваної величини середнього квадратичного відхилення досліджуваного розподілу.

**Виконання вимірювань твердості металів і сплавів.** Твердістю матеріалу називають здатність чинити опір механічному проникненню в його поверхневий шар іншого твердого тіла. Твердість є однією з найбільш важливих характеристик продукції і контролюється, як правило, на всіх етапах термічного оброблення.

Твердість в більшості випадків випробовується при статичному характері втискування індентора у вигляді кульки, конуса або піраміди в тіло досліджуваного об'єкта або дряпанням поверхневого шару пірамідою з твердого матеріалу.

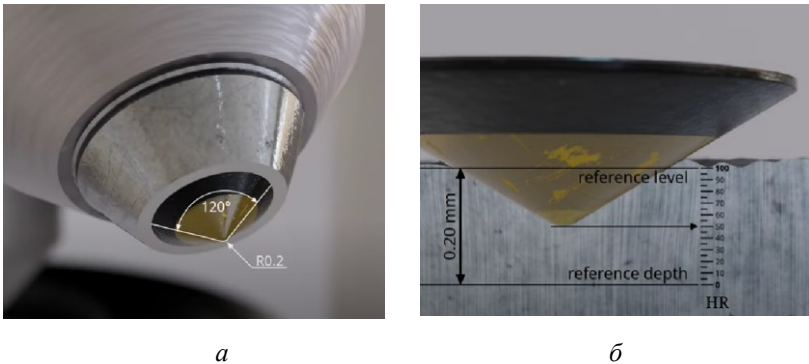


Рис. 5.1 – Випробування на твердість за Роквеллом: індентор-конус (а), вдавлювання конуса (б)

Існує понад 30 методів вимірювання твердості, але найбільш широкого застосування знайшли методи Брінелля, Роквелла і Віккерса.

Твердість за Роквеллом вимірюють на приладах «ТК» шляхом втискування в досліджуваній об'єкт діамантового конуса з кутом при вершині 120° або сталевий кульки діаметром 1,58 мм (рис. 5.1–5.2). Твердість записують так:  $HRC$  \_\_,  $HRB$  \_\_,  $HRA$  \_\_.

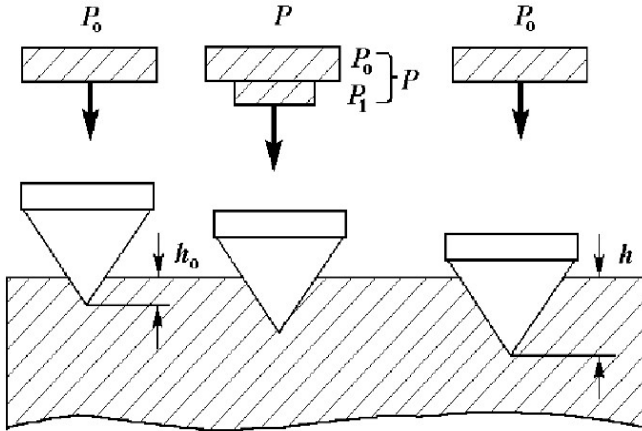


Рис. 5.2 – Схема вимірювання твердості за Роквеллом

### Порядок і зміст виконання роботи

1. Обчислити значення величини  $\varpi$  за формулою:

$$\varpi = -n - 2 \cdot \sum_i^n \left\{ \frac{2j-1}{2n} \cdot \ln F(x_j) + \left( 1 - \frac{2j-1}{2n} \right) \cdot \ln [1 - F(x_j)] \right\},$$

де  $n$  – кількість спостережень ( $n \geq 50$ );  $X_j$  – результат спостережень, що відповідає  $j$ -му номеру у варіаційному ряду;  $j$ -й номер присвоюється при впорядкуванні результатів в порядку їх зростання, тобто  $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ );  $F(X_j)$  – значення функції теоретичного нормального розподілу при значенні аргументу, що дорівнює  $X_j$  – визначається за статистичною таблицею функції нормального розподілу (див. табл. 5.1).

**Зауваження:** при обчисленнях за допомогою пакета MATHCAD застосовується вбудована функція  $\text{pnorm}$ .

**Таблиця 5.1 – Значення функції нормального розподілу**

$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$
0,00	0,50000	1,00	0,84134	2,00	0,97725	3,00	0,99865
0,05	0,51994	1,05	0,85314	2,05	0,97725	3,05	0,99886
0,10	0,53983	1,10	0,86433	2,10	0,98214	3,10	0,99903
0,15	0,55962	1,15	0,87493	2,15	0,98442	3,15	0,99918
0,20	0,57926	1,20	0,88493	2,20	0,98610	3,20	0,99931
0,25	0,59871	1,25	0,89435	2,25	0,98778	3,25	0,99942
0,30	0,61791	1,30	0,90320	2,30	0,98928	3,30	0,99952
0,35	0,63683	1,35	0,91149	2,35	0,99061	3,35	0,99960
0,40	0,65542	1,40	0,91924	2,40	0,99180	3,40	0,99966
0,45	0,67364	1,45	0,92647	2,45	0,99286	3,45	0,99972
0,50	0,69146	1,50	0,93319	2,50	0,99379	3,50	0,99977
0,55	0,70884	1,55	0,93943	2,55	0,99461	3,55	0,99981
0,60	0,72575	1,60	0,94520	2,60	0,99534	3,60	0,99984
0,65	0,74215	1,65	0,95053	2,65	0,99598	3,65	0,99987
0,70	0,75804	1,70	0,95543	2,70	0,99653	3,70	0,99989
0,75	0,77337	1,75	0,95994	2,75	0,99702	3,75	0,99991
0,80	0,78814	1,80	0,96407	2,80	0,99744	3,80	0,99993
0,85	0,80234	1,85	0,96784	2,85	0,99781	3,85	0,99994
0,90	0,81594	1,90	0,97128	2,90	0,99813	3,90	0,99995
0,95	0,82894	1,95	0,97441	2,95	0,99841	3,95	0,99996

2. За таблицею 5.2 визначити значення функції  $b$ , що відповідає обчисленому значенню  $\varpi$  (функція  $b$  є функцією розподілу величини  $\varpi$ ).

**Зауваження:** при  $\varpi > 2,45$  беруть  $b = 1$ .

3. Задати рівень значущості  $B$ .

**Зауваження:** при контролі твердості рекомендовано вибирати значення  $B$ , що дорівнює 0,05.

4. Оцінити узгодженість емпіричного і теоретичного розподілу при контролі твердості за співвідношенням між величинами  $b$  і  $(1 - B)$ : якщо  $b \geq (1 - B)$ , то гіпотезу про узгодженість розподілів відкидають, якщо  $b < (1 - B)$ , то відповідну гіпотезу приймають.

**Зауваження 1.** Табличні значення (див. табл. 5.1) задані для нормалізованих змінних  $t$ :

$$t = \frac{X_j - X_{cep}}{S}, \quad X_{cep} = \frac{\sum X_j}{n}, \quad S = \sqrt{\frac{\sum (X_j - X_{cep})^2}{n-1}},$$

де  $X_{cep}$ ,  $S$  – відповідно середнє арифметичне значення і середнє квадратичне відхилення для  $n$  спостережень.

**Зуваження 2.** Якщо  $t < 0$ , то табличне значення потрібно відняти від 1.

**Таблиця 5.2 – Значення функції розподілу в випадкової величини  $\sigma$**

$\sigma$	$b$	$\sigma$	$b$	$\sigma$	$b$	$\sigma$	$b$	$\sigma$	$b$
0,00	0,000	0,50	0,253	1,00	0,643	1,50	0,824	2,00	0,908
0,05	0,000	0,55	0,294	1,05	0,663	1,55	0,833	2,05	0,913
0,10	0,000	0,60	0,352	1,10	0,691	1,60	0,846	2,10	0,919
0,15	0,001	0,65	0,389	1,15	0,709	1,65	0,854	2,15	0,923
0,20	0,010	0,70	0,441	1,20	0,732	1,70	0,865	2,20	0,929
0,25	0,025	0,75	0,474	1,25	0,747	1,75	0,872	2,25	0,932
0,30	0,062	0,80	0,519	1,30	0,768	1,80	0,881	2,30	0,937
0,35	0,095	0,85	0,547	1,35	0,780	1,85	0,887	2,35	0,940
0,40	0,151	0,90	0,586	1,40	0,798	1,90	0,896	2,40	0,944
0,45	0,192	0,95	0,610	1,45	0,809	1,95	0,901	2,45	0,947

### **Завдання**

За результатами вимірювання твердості за методом Роквелла заданого матеріалу – сталі після остаточного термічного оброблення – (табл. 5.3) встановити, чи підкоряються наведені результати вимірювань твердості сталі нормального закону розподілу.

**Таблиця 5.3 – Результати вимірювань твердості сталі після остаточного термічного оброблення (за Роквеллом HRC)**

<b>Варіант 1 (сталь 3Х2В8Ф, гарт. 1120–1160 °С, відп.660–680 °С)</b>										
Інтервал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1–10	40	41	42	43	45	40	42	40	44	45
11–20	41	42	40	42	45	43	40	42	41	45
21–30	41	42	43	44	44	45	40	42	40	41
31–40	41	40	45	42	43	43	45	41	40	41
41–50	40	42	45	41	41	41	42	45	44	43
51–60	41	44	40	41	41	44	43	41	41	42
61–70	45	45	45	40	40	41	43	42	40	41
71–80	42	41	44	41	42	42	42	40	42	43
81–90	43	40	44	42	45	41	41	45	44	44
91–100	41	42	44	45	43	45	41	44	45	45

**Продовження таблиці 5.3**

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>
<b>Варіант 2</b> (сталь 5ХНМ, гарт. 850 °С, відп. 460–520 °С)										
1–10	37	38	42	37	37	38	37	37	38	40
11–20	42	41	40	38	38	42	38	41	37	40
21–30	39	41	38	42	39	42	40	42	38	42
31–40	40	40	41	40	40	41	39	42	39	38
41–50	41	42	39	39	41	40	40	41	40	42
51–60	38	42	37	38	42	39	41	40	40	38
61–70	37	42	38	40	37	38	42	39	41	37
71–80	42	41	37	41	38	37	41	40	42	37
81–90	39	40	42	42	39	42	40	39	38	42
91–100	37	38	40	41	40	41	37	38	38	41
<b>Варіант 3</b> (сталь Р9М4К8, гарт. 1220 °С, відп. трикратний 540 °С)										
1–10	69	67	69	67	66	67	69	69	68	67
11–20	68	68	69	68	69	67	68	69	68	66
21–30	67	68	68	67	69	66	69	67	69	68
31–40	66	69	68	68	68	67	67	68	67	69
41–50	69	66	67	69	68	68	66	68	68	69
51–60	67	67	69	69	67	69	69	69	69	68
61–70	69	68	67	69	67	68	67	66	67	69
71–80	68	69	66	66	69	69	68	67	69	67
81–90	67	69	67	67	67	69	69	68	69	68
91–100	69	68	68	69	69	69	67	69	69	68
<b>Варіант 4</b> (сталь 30ХГСА, гарт. 8800 °С, відп. 2300 °С)										
1–10	43	44	45	44	45	51	51	43	45	45
11–20	44	43	46	43	44	50	50	49	43	43
21–30	45	51	47	50	43	49	49	48	43	44
31–40	46	50	48	51	44	48	43	46	43	43
41–50	47	49	49	51	45	47	44	43	44	50
51–60	48	48	50	50	46	46	45	51	45	50
61–70	49	47	51	49	47	45	46	43	46	51
71–80	50	46	43	48	48	44	47	51	47	51
81–90	51	45	44	47	49	43	48	50	48	51
91–100	43	44	45	46	50	51	49	50	49	50



### Продовження таблиці 5.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>Варіант 5</b> (сталь X12M, гарт. 9700 °С, відп. 3200 °С)										
1–10	58	59	60	59	60	61	58	59	58	59
11–20	59	59	61	61	61	60	59	59	58	58
21–30	60	58	58	61	61	61	59	58	59	59
31–40	61	58	59	60	61	59	58	61	60	61
41–50	58	61	60	60	61	58	60	60	61	60
51–60	59	60	62	61	60	61	61	61	58	58
61–70	60	59	61	62	60	60	61	60	59	60
71–80	61	58	60	58	59	59	61	59	60	60
81–90	58	61	60	59	59	58	60	58	61	59
91–100	59	60	58	59	58	59	58	58	58	58

### Зміст звіту лабораторної роботи

1. Назва та мета роботи.
2. Оброблення результатів вимірювань твердості сталі після остаточного термічного оброблення за Роквеллом *HRC*.
3. Оцінювання узгодженості емпіричного та теоретичного розподілу при контролі твердості.
4. Висновки до роботи.

**Зауваження:** скріни екрана, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені вище матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### Контрольні питання

1. Охарактеризуйте вимоги до об'єкту дослідження – результатів вимірювань твердості сплаву за Роквеллом.
2. Чому для визначення оцінок випадкових величин доцільним є заздалегідь встановити закон розподілу контрольованої випадкової величини?
3. Процедура встановлення закону розподілу випадкової величини.
4. Детально опишіть принцип дії і схему статистичного методу оцінювання узгодженості емпіричного і теоретичного розподілу при контролі твердості.

**Література:** [1, с. 82–84, 146–149; 4, с. 194–203]

## Лабораторна робота 6.

### Парний регресійний аналіз результатів експериментів при визначенні здатності деталей до крихкого руйнування

---

**Мета:** формування практичних навичок із застосування методу найменших квадратів для визначення математичної залежності значення ударної в'язкості сталі від температури відпуску побудови прогнозу надійності деталі в умовах експлуатації.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи та завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) що є ударною в'язкістю сталі;
- 2) що є крихким руйнуванням металу;
- 3) зміст випробовування на ударну в'язкість;
- 4) числова характеристика ударної в'язкості металу;
- 5) етапи проведення відбіркового регресійного аналізу;
- 6) лінійне та нелінійне рівняння регресії; метод найменших квадратів;
- 7) методи розв'язання систем лінійних рівнянь.

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

### Теоретичні відомості

Через різні причини у процесі експлуатації деталі машин можуть піддаватися короткочасному впливу навантажень (ударам). Тому для визначення здатності деталі до крихкого руйнування важливо установити, чи існує математична залежність між температурою відпуску і значенням ударної в'язкості. Наявність такої залежності дає можливість з високим ступенем точності прогнозувати надійність деталі в умовах експлуатації.

Установити математичну залежність між значенням температури відпуску і значенням ударної в'язкості дозволяє регресійний аналіз.

**Лінійна парна кореляція і регресія.** Регресійні моделі залежно від обсягу вибірки статистичних даних поділяють на узагальнені та вибіркові. Узагальненою вважається регресійна модель, побудована на основі статистичних даних генеральної сукупності і має вигляд:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u .$$

Вибіркова модель будується вже за статистичними даними вибіркової сукупності. У загальному вигляді вибіркова регресійна модель між факторною  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  та результативною ознаками  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  з врахуванням фактора випадкових величин (помилки)  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  записується у вигляді:

$$y = a_0 + a_1 x + u, \quad (6.1)$$

де  $a_0$  і  $a_1$  – невідомі параметри регресійної моделі.

Тут і надалі з метою уникнення неоднозначності великими літерами  $X$ ,  $Y$ ,  $U$  ми позначаємо дискретні (векторні) величини, а малими  $x$ ,  $y$ ,  $u$  – неперервні.

Задача регресійного аналізу полягає у відшуванні невідомих параметрів  $a_0$  і  $a_1$  рівняння регресії  $y = a_0 + a_1 x$ . При цьому необхідно досягти «найкращої» апроксимації. Найчастіше при цьому користуються *методом найменших квадратів*, що передбачає мінімізацію виразу:

$$Q(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \rightarrow \min, \quad (6.2)$$

де  $y_i$  – фактичні (емпіричні);  $\hat{y}_i$  – розрахункові (теоретичні) значення результативної ознаки.

Надамо геометричну інтерпретацію методу найменших квадратів (див. рис. 6.1). На рисунку пряма є теоретичною лінією регресії. Із множини прямих необхідно вибрати «найкращу» з точки зору мінімізації суми квадратів відхилень  $u_i$ :

$$u_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - a_0 - a_1 x_i, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Відхилення, або похибки  $u_i$ , ще іноді називають *залишками*. Теоретичну лінію регресії необхідно проводити таким чином, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною. В цьому і полягає суть методу найменших квадратів: невідомі параметри  $a_0$  та  $a_1$  визначаються таким чином, щоб мінімізувати  $\sum_{i=1}^n u_i^2$ .

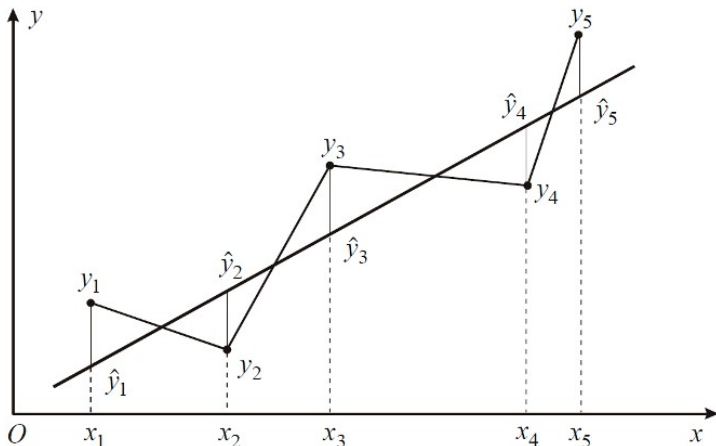


Рис. 6.1 – Геометрична інтерпретація методу найменших квадратів

Мінімум функції (6.2) досягається за умови:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases} \quad (6.3)$$

звідки визначаємо параметри регресії:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (6.4)$$

$$a_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Параметри  $a_0$  та  $a_1$  мають такий зміст: параметр  $a_0$  характеризує деяке середнє значення результативного показника  $y$ , а параметр  $a_1$  показує, як в середньому зміниться  $y$  при зміні  $x$  на одну одиницю.

Для перевірки гіпотези про наявність зв'язку між факторною  $X$  і результативною  $Y$  ознаками деякого явища та оцінювання тісноти цього зв'язку обчислюють коефіцієнт парної кореляції  $r_{xy}$  (якщо зв'язок лінійний):

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (6.5)$$

Тут  $n$  – довжина вибірки або кількість спостережень,  $\overline{xy} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ ,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – середні вибіркові ознак  $X$  та  $Y$ .

Коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$  змінюється в інтервалі:  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ .

При  $r_{xy} = \pm 1$  між  $X$  та  $Y$  існує пряма або зворотна функціональна залежність. Для коефіцієнта кореляції, рівного 0, між  $X$  та  $Y$  не існує кореляційного зв'язку. Якщо коефіцієнт кореляції знаходиться в інтервалі  $-1 < r_{xy} < 0$  або  $0 < r_{xy} < 1$ , то між  $X$  та  $Y$  існує зворотна або пряма кореляційна залежність.

За щільністю зв'язку можна виділити:

- а) слабкий зв'язок, якщо  $0 < |r_{xy}| \leq 0,3$ ;
- б) помірний зв'язок, якщо  $0,3 < |r_{xy}| \leq 0,65$ ;
- в) сильний зв'язок, якщо  $0,65 < |r_{xy}| \leq 0,95$ .

**Нелінійна парна кореляція і регресія.** При використанні регресійного аналізу для вивчення нелінійних зв'язків необхідно перетворити криву регресії у функцію, яка лінійна відносно параметрів  $a_0$  і  $a_1$ , тобто провести *лінеаризацію* рівняння регресії.

Параметри цієї моделі можна знайти, розв'язавши відповідну лінеаризовану систему нормальних рівнянь. Системи нормальних рівнянь для оцінювання невідомих параметрів нелінійної регресійної моделі наведені у таблиці 6.1.

**Таблиця 6.1 – Найбільш поширені математичні залежності та системи нормальних рівнянь, що їм відповідають**

Математична залежність	Система нормальних рівнянь
$y = a_0 + a_1 \cdot x$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{cases}$
$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} \end{cases}$
$y = a_0 \cdot x^{a_1}$	$\begin{cases} nLna_0 + a_1 \sum_{i=1}^n Lnx_i = \sum_{i=1}^n Lny_i \\ Lna_0 \sum_{i=1}^n Lnx_i + a_1 \sum_{i=1}^n (Lnx_i)^2 = \sum_{i=1}^n Lny_i \cdot Lnx_i \end{cases}$
$y = \frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x}}$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \end{cases}$
$y = a_0 + a_1 x^2$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{cases}$
$y = \frac{x}{a_0 + a_1 x}$	$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i} \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{y_i} \end{cases}$

Отже, регресійний аналіз дозволяє представити шукану математичну залежність у вигляді лінійної, гіперболічної, показникової, логарифмічної або будь-якої іншої залежності. Очевидно, що вибрати потрібно таку залежність, що найбільше точно визначає стійкість сталі до крихкого руйнування (залежність ударної в'язкості від температури відпуску сталі), тобто, коли регресійний аналіз буде проведений найбільше точно.

**Поліноміальна парна регресія.** Ефективним засобом регресійного аналізу є поліноміальна регресія, точність якої може бути як завгодно велика. Полягає вона в апроксимації досліджуваних даних поліномом вигляду:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + u.$$

Чим більший показник степеня  $m$ , тим більшою може бути точність апроксимації.

Частковим випадком поліноміальної регресії є параболічна (квадратична), яка забезпечує апроксимацію квадратичною функцією:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + u.$$

Коефіцієнти квадратичної функції знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{cases} \quad (6.6)$$

Розв'яжемо систему нормальних рівнянь будь-яким відомим методом. У випадку нелінійної залежності між явищами, лінійний коефіцієнт парної кореляції втрачає фізичний зміст. Для оцінювання тісноти криволінійного кореляційного зв'язку використовують так зване кореляційне відношення, яке обчислюється за формулою:

$$r_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (6.7)$$

Цей показник має те саме значення, що і коефіцієнт кореляції, але тільки для криволінійної форми зв'язку між ознаками  $X$  та  $Y$ . Інколи доцільно для оцінювання тісноти зв'язку між  $X$  та  $Y$  замість кореляційного відношення розраховувати за формулою (6.5) лінеаризований коефіцієнт кореляції, абсолютна величина якого дорівнює кореляційному відношенню.

Величина кореляційного відношення знаходиться в межах  $0 \leq \eta_{xy} \leq 1$ . У випадку функціонального зв'язку  $\eta_{xy} = 1$ . Якщо кореляційний зв'язок відсутній, то  $\eta_{xy} = 0$ . Однак, значення  $\eta_{xy} = 0$  не свідчить про відсутність причинної залежності між явищами.

На співвідношеннях між  $\eta_{xy}$  і  $r_{xy}$  можна побудувати критерій криволінійності зв'язку між ознаками  $X$  та  $Y$ . Спрощена формула для розрахунку такого критерію має вигляд:

$$K = \frac{\sqrt{n}}{0,67449} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\eta_{xy}^2 - r_{xy}^2}. \quad (6.8)$$

Якщо значення обчисленого  $K$  більше 2,5, то кореляційний зв'язок можна вважати криволінійним.

Частина дисперсії, що пояснює регресію, називається **коефіцієнтом детермінації** і позначається  $R^2$ . Коефіцієнт детермінації використовується як критерій адекватності моделі.

Таким чином, коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = \frac{\delta_y^2}{\sigma_y^2}, \quad (6.9)$$

де  $\delta_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$  – дисперсія, що пояснює регресію (дисперсія, яка вимірює варіацію результативної ознаки  $Y$  за рахунок дії факторної ознаки  $X$ );

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

– дисперсія похибок, або залишкова дисперсія, яка характеризує варіацію ознаки  $Y$  за рахунок всіх факторів, крім  $X$ .

З виразу (6.8) випливає, що коефіцієнт детермінації завжди додатний і знаходиться у межах  $0 \leq R^2 \leq 1$ .



Необхідно відмітити, що при лінійній формі зв'язку коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$  є оцінкою точності апроксимації тобто адекватності моделі і дорівнює кореляційному відношенню  $\eta_{xy}$ .

Після побудови моделі обчислюється також середня відносна похибка апроксимації, %:

$$\varepsilon = \frac{100}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|. \quad (6.10)$$

Середня похибка апроксимації показує у відсотках середнє для всіх значень результативного показника відхилення розрахункових значень. Модель можна вважати адекватною, якщо середня похибка не перевищує 12–15 %.

#### *Оцінювання адекватності лінійної (лінеаризованої) регресії.*

Оцінювання адекватності парної регресії здійснюється за  $F$ -критерієм Фішера. Для цього знаходять розрахункове (фактичне) значення  $F$ -критерію Фішера за формулою:

$$F_p = \frac{\delta_y^2}{\sigma_u^2}. \quad (6.11)$$

$$\text{Тут } \delta_y^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2, \quad \sigma_u^2 = \frac{1}{n-m-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad n -$$

число дослідів  $(m-1)$  – число включених у регресію факторів, які чинять суттєвий вплив на показник.

У випадку парної регресії  $m-1=1$ .

**Таблиця 6.2 – Таблиця  $F$ -розподілу для ймовірності  $p = 0,95$**

Число степенів вільності $k_2 = n - m - 1$											
$k_1$	4	5	6	7	8	9	10	20	40	100	$\infty$
1	225	230	234	237	239	241	242	248	251	253	254
2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5
3	9,12	9,01	8,94	8,88	8,85	8,81	8,79	8,68	8,60	8,56	8,53
4	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,71	5,66	5,63
5	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,46	4,40	4,36
6	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,77	3,71	3,67
7	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,44	3,34	3,28	3,23
8	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,15	3,05	2,98	2,93
9	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	2,93	2,82	2,76	2,71
10	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,77	2,67	2,59	2,54

Для заданої надійної ймовірності  $p = 1 - \alpha$ , де  $\alpha$  – рівень значущості та числа степенів вільності  $k_1 = m - 1$ ,  $k_2 = n - m - 1$  знаходимо табличне значення  $F_{\alpha, k_1, k_2}$ . Отримане розрахункове значення порівнюється з табличним (див. табл. 6.2).

Якщо  $F_p > F_{\alpha, k_1, k_2}$ , то з надійною ймовірністю  $p = 1 - \alpha$  можна вважати, що регресійна модель адекватна експериментальним даним і відкидається нульова гіпотеза; у протилежному випадку з надійністю  $p$  розглянуту парну регресію не можна вважати адекватною.

#### **Виконання вимірювань ударної в'язкості металів і сплавів.**

Для проведення випробовування на ударну в'язкість (ударний згин) використовують стандартні зразки з U-подібним концентратором. Зразок, вільно встановлений на опори копра (рис. 6.1), руйнується за один удар важкого маятника у бік, протилежний надрізу (рис. 6.2). Кількісною характеристикою в'язкості при ударному руйнуванні є ударна в'язкість  $KCU$  – відношення роботи  $A$ , необхідної для руйнування зразка до робочої площі поперечного перерізу  $F$ :  $KCU = A / F$ .



**Рис. 6.1 – Маятниковий копер для механічних випробувань на ударний згин (визначення ударної в'язкості)**

Робота, витрачена на руйнування зразка, розраховується за формулою:  $A = P \cdot h_1 \cdot (\cos \beta - \cos \alpha)$ , де  $P$  – маса маятника, кг;  $h_1$  – відстань від осі маятника до його центра ваги, м;  $\beta$  – кут підйому маятника після руйнування зразка;  $\alpha$  – кут підйому маятника перед ударом (рис. 6.2).

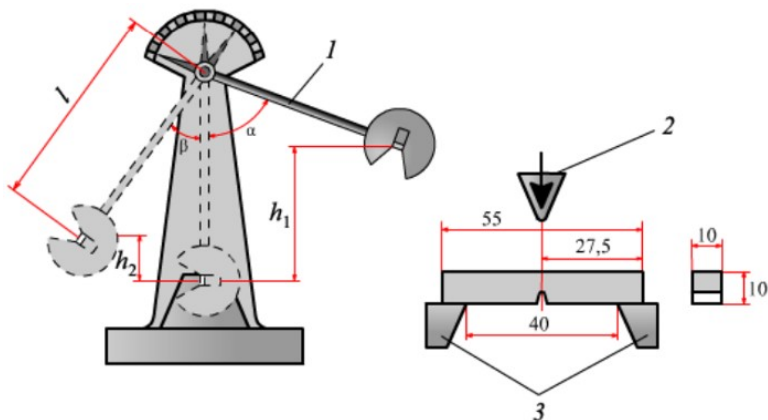


Рис. 6.2 – Схема вимірювання ударної в'язкості:  
 1 – маятник; 2 – ніж маятника; 3 – опори

Оскільки  $P$  та  $h_1$  стали для певного копра, то  $KCU$  можна визначити за значеннями кутів  $\alpha$  та  $\beta$ .

### Порядок і зміст виконання роботи

Етапи виконання регресійного аналізу на основі статистичних даних показника  $Y = t, ^\circ\text{C}$  та фактора  $X = KCU$ :

- 1) для заданої статистичної залежності скласти систему нормальних рівнянь;
- 2) розв'язавши одержану систему, знайти оцінки параметрів лінії регресії;
- 3) обчислити коефіцієнт парної кореляції  $r_{xy}$  за (6.5), якщо зв'язок лінійний, і кореляційне відношення  $\eta_{xy}$  за (6.7), якщо зв'язок нелінійний. Зробити висновки;
- 4) за критерієм  $K$  оцінити криволінійність кореляційного зв'язку;
- 5) обчислити коефіцієнт детермінації  $R^2$  за (6.9). Зробити висновки;
- 6) обчислити середню відносну похибку апроксимації за (6.10). Зробити висновки;
- 7) використовуючи критерій Фішера (6.11), з надійністю  $p = 0,95$  оцінити адекватність прийнятої моделі статистичним даним;
- 8) за розрахованими значеннями встановити математичну залежність, що описує з мінімальною похибкою функціональний зв'язок

типу  $t = F(KCU)$  і є найкращою моделлю для заданих емпіричних даних;

9) за прийнятою математичною моделлю методом екстраполяції знайти точкову оцінку прогнозу для заданого значення  $KCU_p$ ;

10) побудувати графіки:

а) емпіричних даних;

б) лінії регресії.

### Завдання

За результатами випробування на ударну в'язкість  $KCU$  стандартних зразків із заданої сталі, відпущеної за заданим температурним режимом (табл. 6.3), установити математичну залежність, що описує з мінімальною похибкою функціональний зв'язок типу  $t = F(KCU)$ .

**Таблиця 6.3 – Результати вимірювань ударної в'язкості при різних температурах відпуску**

Серія вимірювань	Перша серія дослідів					Друга серія дослідів				
	<b>Варіант 1</b> (сталь 09Г2)									
	Температура відпуску $t, ^\circ\text{C}$									
	200	400	500	600	700	200	400	500	600	700
	Ударна в'язкість $KCU, \text{Дж/см}^2$									
А	57	97	127	185	166	59	99	127	188	167
Б	56	98	126	186	167	60	100	128	187	166
В	60	99	129	187	165	57	98	128	187	169
Г	61	97	128	188	168	58	98	126	186	166
Д	59	100	127	186	169	60	97	127	188	167
Е	58	99	129	184	165	60	98	126	188	168
Серія вимірювань	<b>Варіант 2</b> (сталь 14Г2)									
	Температура відпуску $t, ^\circ\text{C}$									
	200	300	400	500	600	200	300	400	500	600
	Ударна в'язкість $KCU, \text{Дж/см}^2$									
	А	98	88	102	175	197	96	86	104	175
Б	97	87	104	174	196	97	88	102	175	197
В	96	86	103	176	195	98	87	103	174	196
Г	97	89	105	177	198	97	88	103	175	195
Д	99	90	101	174	199	97	86	104	178	194
Е	100	88	102	173	196	96	87	104	177	196

**Продовження таблиці 6.3**

Серія вимірювань	<b>Варіант 3 (сталь 15X)</b>									
	Температура відпуску $t, ^\circ\text{C}$									
	200	300	400	500	600	200	300	400	500	600
Ударна в'язкість $KCU, \text{Дж/см}^2$										
А	39	47	77	98	126	39	49	80	98	128
Б	38	48	78	99	127	39	48	80	97	128
В	37	49	79	97	129	40	48	79	95	126
Г	40	50	76	96	128	38	47	79	96	126
Д	41	51	77	100	127	38	47	75	99	127
Е	39	49	80	98	126	40	48	76	97	128
Серія вимірювань	<b>Варіант 4 (сталь 20X)</b>									
	Температура відпуску $t, ^\circ\text{C}$									
	200	300	400	500	600	200	300	400	500	600
Ударна в'язкість $KCU, \text{Дж/см}^2$										
А	118	146	176	197	224	117	149	176	196	226
Б	120	147	175	196	225	116	148	177	197	225
В	117	148	177	195	226	119	149	175	197	224
Г	116	149	176	198	227	118	145	176	195	224
Д	119	147	178	197	223	117	146	176	195	227
Е	118	145	176	196	224	118	149	177	195	226
Серія вимірювань	<b>Варіант 5 (сталь 40X)</b>									
	Температура відпуску $t, ^\circ\text{C}$									
	200	300	400	500	600	200	300	400	500	600
Ударна в'язкість $KCU, \text{Дж/см}^2$										
А	28	21	48	68	146	30	19	50	70	147
Б	30	20	47	69	147	28	20	49	69	146
В	29	19	49	70	148	30	21	48	68	145
Г	27	18	50	67	147	30	20	49	69	145
Д	30	22	51	68	146	28	19	49	70	146
Е	28	20	48	70	148	30	19	50	68	146

**Зміст звіту лабораторної роботи**

1. Назва та мета роботи.
2. Оброблення результатів вимірювань ударної в'язкості ( $KCU$ ) сталі при різних температурах відпуску ( $t$ ).
3. На основі статистичних даних про фактор  $X = KCU$  і показник  $Y = t$ :
  - обчислення точкових оцінок параметрів:

- 1) лінійної регресії  $y = a_0 + a_1 \cdot x$ ;
- 2) степеневі регресії  $y = a_0 \cdot x^{a_1}$ ;
- 3) показникової регресії  $y = a_0 \cdot a_1^x$ ;
- 4) рівносторонньої гіперболи  $y = a_0 + a_1/x$ ;
- 5) квадратичної регресії  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ;

– для кожної з регресій знаходження вибіркового коефіцієнта кореляції і детермінації;

– за допомогою критерію  $K$  оцінювання криволінійності кореляційного зв'язку;

– оцінювання за допомогою середньої похибки апроксимації якості кожного з рівнянь;

– за використання критерію Фішера, з надійністю  $P = 0,95$  перевірка кожної з регресійних моделей на адекватність.

4. За значеннями, що розраховані в попередніх пунктах, установлення найкращої моделі, що описує функціональний зв'язок типу  $t = F(KCU)$ .

Для обраної моделі:

– розрахунок прогнозного значення результату, якщо прогнозне значення фактора  $KCU$  на 10 % є більшим за його середнє значення (для початкових даних);

– побудова точкових графіків статистичних даних і ліній регресії.

5. Висновки до роботи.

**Зауваження:** скріни екрана, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені вище матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### Тестові завдання

Вкажіть правильну відповідь.

**1. На практиці мають справу з вибірковою моделлю, тобто з такою, яка побудована для деякої вибірки. Параметри вибіркової моделі є випадковими величинами, а їх математичне сподівання дорівнює параметрам узагальненої моделі. Щоб визначити параметри узагальненої моделі, необхідно за вибіркою отримати яко-**

мога краці їх оцінки, тобто значення, найближчі до параметрів узагальненої моделі. З цією метою використовують метод найменших квадратів.

- а) так;                      б) ні.

2. Для перевірки коректності побудови моделі визначають насамперед:

- стандартну похибку рівняння;
- коефіцієнт детермінації;
- коефіцієнт множинної кореляції;
- стандартну похибку параметрів.

- а) так;                      б) ні.

3. Показники для перевірки коректності побудови моделі отримують на підставі конкретних статистичних даних, тобто кожна з цих характеристик не є вибірковою характеристикою і тому не має бути перевірена на значущість за допомогою спеціальних статистичних критеріїв.

- а) так;                      б) ні.

4. Коефіцієнт детермінації  $R^2$  показує, яка частина руху залежної змінної описується даним регресійним рівнянням.

- а) так;                      б) ні.

5. Стандартна похибка рівняння (точкова оцінка емпіричної дисперсії залишків) характеризує абсолютну величину розкиду систематичної складової рівняння.

- а) так;                      б) ні.

6. Перевага віддається моделям, у яких стандартна похибка рівняння менша порівняно з іншими моделями. Однак така оцінка якості має суттєвий недолік: через те що для неї не визначено верхню межу, порівняння різних моделей за цим критерієм досить проблематичне.

- а) так;                      б) ні.

7. Якщо побудована модель адекватна за  $F$ -критерієм, то її застосовують для прогнозування залежної змінної.

- а) так;                      б) ні.

8. Очевидно, з віддаленням від середнього значення вибірки спостережень похибка прогнозу зростатиме, що призведе до збіль-

*шення довірчого інтервалу для індивідуального значення залежної змінної.*

- а) так;                      б) ні.

*9. Чим менша стандартна похибка  $S$ , тим краще функція регресії відповідає дослідним даним.*

- а) так;                      б) ні.

*10. Коефіцієнт кореляції досить великий, тому існує тісний лінійний зв'язок усіх незалежних факторів  $x_1, x_2, x_3$  із залежною змінною  $y$ .*

- а) так;                      б) ні.

*Література:* [1, с. 84–104, 151–158; 2, с. 14–33; 4, с. 82–96]



## *Лабораторна робота 7.*

### **Інтерполяція й екстраполяція емпіричних таблиць при призначенні режиму нагрівання сталевих виробів у полум'яних печах та соляних ваннах**

---

**Мета:** формування практичних навичок із застосування методу інтерполяції й екстраполяції емпіричних таблиць з рівномірним і нерівномірним кроком для визначення норм часу виконання операцій щодо нагріву сталевих виробів у полум'яних печах і соляних ваннах.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи та завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) термічне оброблення сплавів;
- 2) аналіз технологічного процесу загартування виробів;
- 3) вибір та обґрунтування оснащення для технологічного процесу загартування виробів;
- 4) визначення режиму гартування сталевих виробів у полум'яних печах і соляних ваннах;
- 5) задача інтерполяції;
- 6) задача екстраполяції;
- 7) концепція інтерполяції та екстраполяції.

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

### **Теоретичні відомості**

Процес загартування сталей передбачає застосування камерних печей, які можуть нагрівати середу до температури 800 °C і підтримувати її протягом тривалого періоду. Найчастіше технологія поетапного нагріву передбачає досягнення температури 500 °C на першому етапі, після чого витримується певний проміжок часу для забезпечення рівномірності нагріву і проводиться підвищення температури до критичної позначки.

Швидкість нагрівання і витримки виробу в різних печах наведена в таблицях 7.1–7.2.

Зазначені показники дійсні при завантаженні в піч певної кількості деталей (нормативний документ «Загальномашинобудівні нормативи допоміжного часу на термічне оброблення металу в печах, ваннах та установках СВЧ», міжнародний стандарт ISO 4885:1996: Ferrous products – Heat treatments, NEQ), європейський стандарт EN 10052:1993 Vocabulary of heat treatment terms for ferrous products – NEQ).

**Таблиця 7.1 – Нагрівання круглих в перерізі виробів у різних печах**

Тип печі	Температура печі, °С	Час нагрівання 1 мм діаметра виробу, с
Електропіч	800	35–40
Нафтова піч	800	30–35
Соляна ванна	800	10–12
Соляна ванна	1300	5–6
Свинцева ванна	800	5–6

**Таблиця 7.2 – Нагрівання квадратних та прямокутних в перерізі виробів у різних печах**

Тип печі	Температура печі, °С	Час нагрівання 1 мм товщини деталей з перетином, с	
		квадратним	прямокутним
Електропіч	800	50–60	60–75
Полум'яна піч		45–50	55–60
Соляна ванна		15–18	18–22

У таблиці 7.3 наведені найбільш використовувані солі, які застосовуються для соляних ванн.

**Таблиця 7.3 – Солі, що застосовуються для соляних ванн**

Склад суміші	Вага, %	Температура плавлення, °С	Рекомендовані температурні режими роботи, °С
Селітра калію	56	153	175–500
Нітрит калію	44		
Кухонна сіль	44	660	720–900
Калій хлористий	56		
Барій хлористий	100	960	1100–1350

При призначенні норм часу виконання операцій нагріву за допомогою емпіричних таблиць часто використовують наближені значення часових оцінок, оскільки підібрати точне значення часу для виконання операції щодо нагріву деталей конкретної маси і товщини стінки або діаметра заготовки у заданих виробничих умовах, часто, через дискретність таблиць не є можливим. Тому до похибки самих таблиць додається і похибка екстраполяції (похибка округлення у разі, коли умови, для яких виконується нормування часу нагріву, виходять за межі, передбачені таблицями) або похибка інтерполяції (випадає,

коли крок таблиць надмірно великий і умови, визначені таблицями не збігається з фактичними умовами, для яких виконується нормування).

Зменшити похибку вибору призначення норм часу на проведення операцій нагріву дозволяє використання чисельних методів, наприклад, інтерполяційного многочлена Лагранжа або інтерполяційної формули Ньютона, які застосовуються для обчислення значень дискретно заданих функцій. Використання апарата чисельної інтерполяції може бути корисним і при формуванні комп'ютерних баз нормативних даних часових або інших оцінок операцій щодо нагріву деталей і заготовок, оскільки дозволяє згортати таблиці (укрупнювати їх крок без втрати точності).

### Порядок і зміст виконання роботи

#### 1. Інтерполяція (екстраполяція) таблиць з рівномірним кроком

Вибираються пари табличних значень *аргумент* (товщина стінки деталі або діаметр заготовки  $M_j$ ) – *функція* (норма часу виконання операції нагрівання  $T_j$ ), найближчих до аргументу  $M$ , значення якого не збігається з табличним і для якого необхідно визначити точне значення функції  $T_M$  (із збільшенням кількості пар підвищується точність розрахунку, але збільшується їх складність, тому, як правило, обирають від 3 до 7 пар).

Пари табличних значень записуються послідовно в порядку їх знаходження в елементах таблиці;

Виконується інтерполяція (екстраполяція) з використанням інтерполяційного многочлена Лагранжа для функцій, заданих дискретно зі сталим кроком аргументу:

$$T_M(M) = t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \cdot \dots \cdot (t-n) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{T_j}{(t-1) \cdot C_j},$$

де  $M$  – числове значення аргументу, що не збігається з табличним, для якого визначається значення функції  $T_M$ ;

$i$  – номер пари, починаючи з нульового значення,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;

$n$  – кількість пар табличних значень аргумент – функція (без урахування нульової пари, тобто якщо вибрано 4 пари, то  $n = 3$ );

$$t = \frac{M - M_0}{M_{j+1} - M_j}; \quad C_j = (-1)^{n-1} \cdot (j)! \cdot (n-j)!$$

## 2. Інтерполяція (екстраполяція) таблиць з нерівномірним кроком

Вибираються пари табличних значень *аргумент* (товщина стінки деталі або діаметр заготовки  $R_j$ ) – *функція* (норма часу виконання операції за  $T_j$ ), найближчих до аргументу  $R$ , значення якого не збігається з табличним і для якого слід визначити точне значення функції  $T_R$  (3 – 7 пар).

Пари табличних значень записуються послідовно у порядку їх знаходження в елементах таблиці.

Виконується інтерполяція (екстраполяція) з використанням інтерполяційного многочлена Лагранжа для функцій, заданих дискретно, із змінним кроком аргументу:

$$T_R(R) = (R - R_0) \cdot (R - R_1) \cdot (R - R_2) \cdot \dots \cdot (R - R_n) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{T_j}{D_j},$$

де

$$D_j = (R_j - R_0) \cdot (R_j - R_1) \cdot \dots \cdot (R_j - R_{j-1}) \cdot (R - R_0) \cdot (R_j - R_{j+1}) \cdot \dots \cdot (R_j - R_n).$$

### Завдання

**1. Інтерполяція/екстраполяція таблиць з рівномірним кроком:** визначити числове значення норми часу виконання нагріву сталеві деталі заданого діаметра (див. табл. 7.1) в полум'яній печі, якщо встановлені такі укрупнені норми (див. табл. 7.2).

**Таблиця 7.1 – Діаметр сталеві заготовки, мм**

Варіант	Діаметр сталеві заготовки, $d$ , мм					
1	61	181	88	195	86	104
2	130	176	66	262	55	199
3	167	236	132	65	328	97
4	57	174	103	171	134	79
5	73	169	76	341	90	67

**Таблиця 7.2 – Укрупнені норми часу, хв**

$d$ , мм	50	100	150	200	250	300	350	400	450
Норма часу, хв	40	80	120	160	200	240	280	320	360

**2. Інтерполяція/екстраполяція таблиць з нерівномірним кроком:** визначити числове значення норми часу виконання нагріву сталеві деталі заданого діаметра (див. табл. 7.3) в полум'яній печі, якщо встановлені такі укрупнені норми (див. табл. 7.4).

**Таблиця 7.3 – Діаметр сталевій заготовки, мм**

Варіант	Діаметр сталевій заготовки, $d$ , мм					
	1	8	16	26	9	36
2	35	12	24	29	14	37
3	22	33	4	5	27	2
4	17	7	18	20	30	13
5	23	32	19	25	12	34

**Таблиця 7.4 – Укрупнені норми часу, хв**

$d$ , мм	25	50	100	200	300	450	500
Норма часу, хв	7	17	33	65	127	358	490

### Зміст звіту лабораторної роботи

1. Назва та мета роботи.
2. Результати проміжних розрахунків.
3. Висновки до роботи.

**Зауваження:** скріни екрана, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені вище матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### Контрольні питання

1. Охарактеризуйте технологічний процес загартування виробів.
2. Охарактеризуйте параметри температурного режиму загартування сталевих виробів.
3. Охарактеризуйте зміст методів інтерполяції й екстраполяції емпіричних таблиць з рівномірним і нерівномірним кроком для визначення норм часу виконання операцій щодо нагріву сталевих виробів у полум'яних печах і соляних ваннах.

**Література:** [4, с. 147–153]

## *Лабораторна робота 8.*

### **Оптимізація оснащення термічного цеху методом лінійного програмування**

---

**Мета:** формування практичних навичок із застосування методу лінійного програмування щодо оптимізації процесів і конструкцій при проектуванні й експлуатації систем технологічного оснащення термічного цеху.

**Настанови щодо підготовки до заняття:** ознайомитись з порядком виконання роботи та завданнями; актуалізувати опорні знання:

- 1) технологія термічного оброблення різних виробів;
- 2) термічні цехи й відділення на металургійних підприємствах і підприємствах металевих виробів;
- 3) методика проектування термічних цехів та дільниць;
- 4) оптимізаційні моделі, методи оптимізації;
- 5) методи математичного програмування.

Завдання лабораторної роботи виконуються засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

### **Теоретичні відомості**

Методи оптимізації широко застосовується в машинобудуванні та матеріалознавстві для оптимізації різних технічних рішень при проектуванні, виготовленні і експлуатації виробів і засобів технологічного оснащення. Методи оптимізації пов'язані із задачами математичного моделювання, планування і прогнозування в матеріалознавстві, техніці та технологіях щодо пошуку найкращого з можливих варіантів розв'язку, покращення якості, надійності і достовірності моделей, скорочення їх розмірності. Зокрема, методи оптимізації дозволяють скласти оптимальний план оснащення технологічним устаткуванням цехів та дільниць без проведення спеціальних експериментів.

Методи оптимізації призначені для знаходження екстремумів функцій і значень аргументу, у яких вони досягаються, за наявності обмежень або без них.

Методи математичного програмування, зокрема, лінійного програмування найбільш широко застосовуються на практиці в задачах умовної оптимізації.

**Задачі лінійного програмування.** Загальною задачею лінійного програмування (ЗЛП) називається задача, що полягає у визначенні максимального (мінімального) значення лінійної функції:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j, \quad (8.1)$$

за лінійних умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (8.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = k+1, k+2, \dots, m; \quad (8.3)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, L \leq n, \quad (8.4)$$

де  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  – задані сталі величини,  $x_j$  – шукані змінні та  $k \leq m$ . Функція (8.1) називається **цільовою функцією** (або лінійної формою) задачі (8.1)–(8.4), а умови (8.2)–(8.4) – **обмеженнями задачі**.

**Стандартною** (або симетричною) задачею ЛП називається задача, що полягає у визначенні максимального значення функції (8.1) при виконанні умов (8.2) та (8.4), де  $k = m$  та  $L = n$ .

Основною (або канонічною) задачею ЛП називається задача, що полягає у визначенні максимального значення функції (8.1) при виконанні умов (8.3) та (8.4), де  $k = 0$  та  $L = n$ .

Сукупність чисел  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що задовольняє обмеженням (8.2)–(8.4), називається **допустимим розв'язком** (або планом).

План  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , при якому цільова функція задачі (8.1) набуває максимального (мінімального) значення, називається **оптимальним**.

Значення цільової функції (8.1) при плані  $x$  будемо позначати через  $F(x)$ . Отже,  $x^*$  – оптимальний план задачі, якщо для будь-якого  $x$  виконується нерівність  $F(x) \leq F(x^*)$  (відповідно  $F(x) \geq F(x^*)$ ).

Зазначені вище три форми задачі ЛП (загальна, стандартна й основна) еквівалентні в тому змісті, що кожна з них за допомогою стандартних перетворень може бути переписана у формі іншої задачі. Це означає, що якщо є спосіб знаходження розв'язку однієї із зазначених задач, то тим самим може бути визначений оптимальний план кожної з трьох задач.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі ЛП до іншої, потрібно в загальному випадку вміти, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки, по-третє, замінити змінні, які не відповідають умові невід'ємності.

У випадку, коли потрібно знайти мінімум функції:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

можна перейти до знаходження максимуму функції:

$$F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n,$$

оскільки  $\min F = \max (-F)$ .

Обмеження-нерівність вихідної задачі ЛП, що має вигляд « $\leq$ », можна перетворити в обмеження-рівність додаванням невід'ємної змінної, а обмеження-нерівність вигляду « $\geq$ » – в обмеження-рівність – вилученням з його лівої частини додаткової невід'ємної змінної.

Таким чином, обмеження-нерівність:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

перетворюється в обмеження-рівність:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad (x_{n+i} \geq 0),$$

а обмеження-нерівність:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

в обмеження-рівність:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i \quad (x_{n+i} \geq 0).$$

Кількість невід'ємних (балансових) змінних, що вводяться при перетворенні обмежень-нерівностей в обмеження-рівності дорівнює числу нерівностей, що перетворюються.

Відзначимо, що якщо змінна  $x_k$  не відповідає умові невід'ємності, то її варто замінити двома невід'ємними змінними  $u_k$  та  $v_k$ , поклавши  $x_k = u_k - v_k$ .

**Симплексний метод розв'язання задачі лінійного програмування.** Розв'язок задачі ЛП можна знайти симплексним методом. Перш ніж застосовувати цей метод, варто записати початкову задачу у формі основної (канонічної) задачі ЛП, якщо вона не має такої форми запису.

Симплексний метод розв'язання задачі ЛП заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції збільшується (за умови, що задана задача має оптимальний план і кожен її опорний план є невід'ємним: опорний план називається **невиродженим**, якщо він складається рівно з  $m$  додатних компонент, у протилежному випадку він називається **виродженим**).

Зазначений перехід можливий, якщо відомий будь-який початковий опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план можна безпосередньо записати.





Покладемо:  $z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}, j = 1, 2, \dots, n, \Delta_j = z_j - c_j, j = 1,$

$2, \dots, n.$

Оскільки вектори  $p_1, p_2, \dots, p_m$  – одиничні, то  $x_{ij} = a_{ij}$  та

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, \Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j.$$

Опорний план  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m, 0, 0, \dots, 0)$  задачі (8.5) – (8.7) є оптимальним, якщо  $\Delta_j \geq 0$  для будь-якого  $j, (j = 1, 2, \dots, n).$

Якщо  $\Delta_k < 0$  для деякого  $j = k$  та серед чисел  $a_{ik}, i = 1, 2, \dots, m,$  немає додатного ( $a_{ik} \leq 0$ ), то цільова функція (8.5) задачі (8.5)–(8.7) не обмежена на множині її планів.

Якщо опорний план  $x$  задачі (8.5)–(8.7) не вироджений та  $\Delta_k < 0,$  але серед чисел  $a_{ik}$  є додатні (не всі  $a_{ik} \leq 0$ ), то існує опорний план  $x'$  такий, що  $F(x') > F(x).$

Перераховані властивості дозволяють перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним, і виявити доцільність переходу до нового опорного плану.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес зручніше вести, якщо умови задачі і початкові дані, отримані після визначення початкового опорного плану, записати, як показано в таблиці 8.1.

**Таблиця 8.1 – Початковий опорний план**

I	Базис	$c_0$	$p_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_r$	...	$c_m$	$c_{m+1}$	...	$c_k$	...	$c_n$
				$p_1$	$p_2$	...	$p_r$	...	$p_m$	$p_{m+1}$	...	$p_k$	...	$p_n$
1	$p_1$	$c_1$	$b_1$	1	0	...	0	...	0	$a_{1(m+1)}$	...	$a_{1k}$	...	$a_{1n}$
2	$p_2$	$c_2$	$b_2$	0	1	...	0	...	0	$a_{2(m+1)}$	...	$a_{2k}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R	$p_r$	$c_r$	$b_r$	0	1	...	0	...	0	$a_{r(m+1)}$	...	$a_{rk}$	...	$a_{rn}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	$p_m$	$c_m$	$b_m$	0	0	...	1	...	1	$a_{m(m+1)}$	...	$a_{mk}$	...	$a_{mn}$
M+1			$F_0$	0	0	...	0	...	0	$\Delta_{m+1}$	...	$\Delta_k$	...	$\Delta_n$

У стовпці  $c_0$  цієї таблиці записують коефіцієнти при невідомих цільової функції, що мають ті самі індекси, що і вектори цього базису.

У стовпці  $p_0$  записують додатні компоненти початкового опорного плану, у ньому ж – в результаті обчислень одержують додатні компоненти опорного плану. Стовпці векторів  $p_j$  є коефіцієнтами розкладу цих векторів за векторами цього базису.

У таблиці 8.1 перші  $m$  рядків визначаються початковими даними задачі, а показники  $(m+1)$ -го рядка обчислюють. У цьому рядку в стовпці вектора  $p_0$  записують значення цільової функції, якого вона набуває при цьому опорному плані, а в стовпці вектора  $p_j$  – значення  $\Delta_j = z_j - c_j$ .

Значення  $z_j$  знаходять як скалярний добуток вектора  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , та вектора  $c_0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ :

$$z_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Значення  $F_0$  дорівнює скалярному добутку вектора  $p_0$  та вектора  $c_0$ :

$$F_0 = \sum_{i=1}^m c_i b_i.$$

Після заповнення таблиці 8.1 початковий опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи  $(m+1)$ -го рядка таблиці. В результаті може мати місце один з таких трьох випадків:

1)  $\Delta_j \geq 0$  для  $j = m+1, m+2, \dots, n$  (при  $j = 1, \dots, m$ ,  $z_j = c_j$  та, відповідно,  $\Delta_j = 0$ ). Тому в даному випадку числа  $\Delta_j \geq 0$  для всіх  $j$  від 1 до  $n$ ;

2)  $\Delta_j < 0$  для деякого  $j$  та усі відповідні цьому індексу величини  $a_{ij} \leq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ );

3)  $\Delta_j < 0$  для деяких індексів  $j$  та для кожного такого  $j$  хоча б одне з чисел  $a_{ij}$  додатне.

У першому випадку на підставі ознаки оптимальності початковий опорний план є оптимальним. В другому випадку цільова функція не обмежена зверху на множині планів, а в третьому випадку можна перейти від початкового плану до нового опорного плану за симплексними перетвореннями, при якому значення цільової функції збільшиться.

Для розв'язання ЗЛП зручно користуватись засобами табличного процесора Microsoft Excel або системи комп'ютерної алгебри MATHCAD.

«Пошук рішення» – це надбудова EXCEL, яка дає можливість розв’язувати оптимізаційні задачі. Якщо в меню «Сервіс» відсутня команда «Пошук рішення», то необхідно завантажити цю надбудову. Вибрати команду «Сервіс => Надбудова» і активізувати надбудову «Пошук рішення». Якщо цієї надбудови немає в діалоговому вікні «Надбудова», то необхідно звернутися до панелі керування Windows, натиснути на піктограмі «Встановлення та видалення програм» і за допомогою програми завантаження EXCEL (або Office) встановити надбудову «Пошук рішення». Для розв’язання задачі необхідно:

- 1) створити формулу для введення умов задачі;
- 2) вказати адреси комірок, в які слід помістити результат розв’язку (змінні комірки);
- 3) ввести початкові дані;
- 4) ввести залежність для цільової функції;
- 5) ввести залежність для обмежень;
- 6) вказати призначення цільової функції (встановити цільову комірку);
- 7) ввести обмеження;
- 8) ввести параметри для розв’язання ЗЛП.

### Порядок і зміст виконання роботи

1. Застосуємо елементи математичного моделювання до задачі про проектування устаткування термічного цеху, яке дозволить забезпечити максимальну продуктивність при проведенні гартування: уведемо змінні  $X_1$ ,  $X_2$  – кількість одиниць (змін завантажень) за умови можливого оснащення цеху печами двох типів; визначимо параметри задачі (для кожної з печей виробничими умовами накладаються відповідні обмеження), визначимо цільову функцію і систему обмежень – складемо математичну модель задачі.

2. Підготуємо формулу для введення умов. Складемо електронну таблицю, у яку запишемо математичну модель задачі у вигляді формул для обчислення обмежень та цільової функції (ЦФ), рис. 8.1.

3. Шукані оптимальні значення вектора  $X = (x_1, x_2)$  будуть розміщені в комірках B3:C3, оптимальне значення цільової функції – в комірці D4.

4. Уведемо початкові дані в створену формулу. Отримаємо результат, показаний на рис. 8.2.

5. Уведемо лінійну залежність для цільової функції: курсор в D4 → кнопка «Майстер функцій» → діалогове вікно «Майстер функцій» → «Категорія» → «Математичні» → «Функції» → СУММПРОИЗВ → масив 1 – B3:C3; масив 2 – B4:C4 → «Готово».

	A	B	C	D	E	F
1		Змінні				
2		X1	X2			
3						
4	Коефіцієнти ЦФ			ЦФ		
5						
6		Обмеження				
7	Обмеження 1					
8	Обмеження 2	ліва частина		знак	права частина	
9	Обмеження 3					
10	Обмеження 4					
11						

Рис. 8.1 – Форма для введення початкових даних

	A	B	C	D	E	F
1		Змінні				
2		X1	X2			
3						
4	Коефіцієнти ЦФ	3	4	ЦФ		
5						
6		Обмеження				
7	Обмеження 1	1	0	≥	10	
8	Обмеження 2	0	1	≥	5	
9	Обмеження 3	1	1	≤	20	
10	Обмеження 4	-1	4	≤	20	
11						

Рис. 8.2 – Уведення початкових даних

СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ(В3:С3;В4:С4)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні						
2		X1	X2					
3								
4	Коефіцієнти ЦФ	3	4	ЦФ				
5								
6		Обмеження						
7	Обмеження 1	1	0	≥	10			
8	Обмеження 2	0	1	≥	5			
9	Обмеження 3	1	1	≤	20			
10	Обмеження 4	-1	4	≤	20			

Аргументы функции

СУММПРОИЗВ

Массив1: В3:С3 = {0;0}

Массив2: В4:С4 = {3;4}

Массив3: = массив

= 0

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов или диапазонов.

**Массив2:** массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность.

[Справка по этой функции](#)      Значение: 0

Рис. 8.3 – Обчислення цільової функції

На екрані: в D4 введена функція, як показано на рис. 8.3.

6. Введемо залежність для лівих частин обмежень: курсор в D4; копіювати формулу в буфер → курсор в D7; вставити формулу з буфера; поширити формулу в D8 – D10. Уведення залежностей лівих частин обмежень завершено (рис. 8.4).

	A	B	C	D	E	F
1			Змінні			
2		X1	X2			
3				ЦФ		
4	Коефіцієнти ЦФ		3	4	0	
5						
6			Обмеження			
7	Обмеження 1	1	0	0	≥	10
8	Обмеження 2	0	1	0	≥	5
9	Обмеження 3	1	1	0	≤	20
10	Обмеження 4	-1	4	0	≤	20

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

\$B\$3:\$C\$3 >= 0

\$D\$10 <= \$F\$10

\$D\$7 >= \$F\$7

\$D\$8 >= \$F\$8

\$D\$9 <= \$F\$9

Рис. 8.4 – Уведення усіх умов для розв’язування задачі

7. Запуск «Пошук рішення» → діалогове вікно «Пошук рішення» (рис. 8.4): увести інформацію в поля:

- «Встановити цільову комірку»;
- «Змінюючи комірку»;
- «Обмеження».

8. Уведення параметрів для розв’язування ЗЛП (рис. 8.5): відкрити вікно «Параметри пошуку рішення» → встановити прапорець «Лінійна модель», що забезпечить застосування симплекс-методу; встановити прапорець «Невід’ємні значення» → «ОК» (на екрані діалогове вікно «Пошук рішення») → «Виконати» (на екрані діалогове вікно «Результати пошуку рішення» (див. рис. 8.6).

Надбудова EXCEL «Пошук рішення» дозволяє подати результати пошуку розв’язку в формі звітів. Існує три типи таких звітів:

Результати (Answer): у звіт включаються вхідні і вихідні значення цільової і змінних комірок, додаткові відомості про обмеження.

D4     $\text{=СУММПРОИЗВ(В3:С3;В4:С4)}$

	A	B	C	D	E	F
1		Змінні				
2		X1	X2			
3		0	0	ЦФ		
4	Коефіцієнти ЦФ	3	4	0		
5		Обмеження				
7	Обмеження 1	1	0	0	≥	10
8	Обмеження 2	0	1	0	≥	5
9	Обмеження 3	1	1	0	≤	20
10	Обмеження 4	-1	4	0	≤	20

Параметры поиска решения

Максимальное время: 100 секунд    ОК

Предельное число итераций: 100    Отмена

Относительная погрешность: 0,000001    Загрузить модель...

Допустимое отклонение: 5 %    Сохранить модель...

Сходимость: 0,0001    Справка

Линейная модель     Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения     Показывать результаты итераций

Оценки    Разности    Метод поиска

линейная     дряные     Ньютона

квадратичная     центральные     сопряженных градиентов

Рис. 8.5 – Уведения параметрів

	A	B	C	D	E	F
1		Змінні				
2		X1	X2			
3		12	8	ЦФ		
4	Коефіцієнти ЦФ	3	4	68		
5		Обмеження				
7	Обмеження 1	1	0	12	≥	10
8	Обмеження 2	0	1	8	≥	5
9	Обмеження 3	1	1	20	≤	20
10	Обмеження 4	-1	4	20	≤	20

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение    Тип отчета

Восстановить исходные значения    Результаты

Устойчивость

Пределы

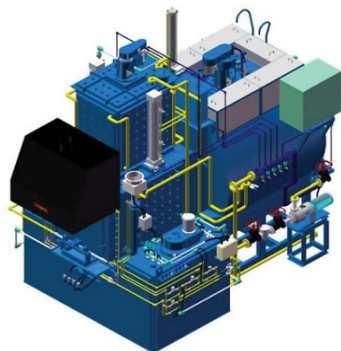
ОК    Отмена    Сохранить сценарий...    Справка

Рис. 8.6 – Результаты «Пошуку рішення»

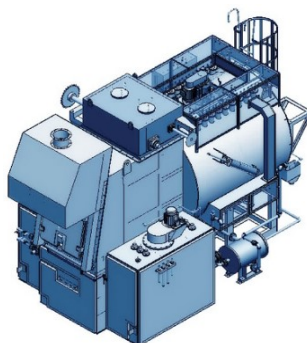
Стійкість (Sensitivity): містить повідомлення про чутливість розв'язку до незначних змін в змінних комірках або у формулах обмежень. Межі (Limits): окрім початкових і кінцевих значень цільової і змінних комірок в звіт включаються верхні і нижні межі значень, яких можуть набувати змінні комірki при дотриманні обмежень. Отже, за результатами розв'язання задачі маємо: максимальна продуктивність (68 виробів) буде забезпечена при використанні 12 печей (змін завантажень) першого типу у 8 печей (змін завантажень) другого типу.

### **Завдання**

Скласти оптимальний план використання чотирьох типів термічних печей і визначити необхідну кількість устаткування (змін завантажень) кожного типу (рис. 8.7).



Стандартна камерна електропіч для гартування FBQ-1200



Стандартна камерна електропіч для гартування, суміщена з водяним баком UBE-FE-200



Піч-ванна з використанням розплавів солей NaCl і BaCl<sub>2</sub> TS 90/80



Газова нагрівальна піч (паливо – метан) SNOL1000/12

**Рис. 8.7 – Задане устаткування для термічного оброблення**



Таблиця 8.2 – Питомі витрати на експлуатацію

Варіант	Стандартна камерна електропіч для:										Піч-ванна з використанням розплавів солей NaCl і BaCl <sub>2</sub>					Газова нагрівальна піч (паливо – метан)					
	гартування					гартування, суміщена з водяним баком															
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
Витрати на експлуатацію однієї печі, грн	А	54	36	36	39	44	62	19	27	64	53	71	26	25	19	26	19	63	25	37	51
	Б	21	62	21	19	62	21	34	62	25	19	27	46	71	37	25	34	71	41	19	34
	В	37	54	27	25	54	54	25	21	38	27	26	54	49	38	73	26	21	19	25	25
	Г	25	62	38	54	71	38	41	62	26	71	25	62	62	62	56	32	34	26	71	62
	Д	34	37	26	41	27	37	34	54	21	19	37	55	41	38	21	37	27	38	41	71
Е	37	54	25	54	19	27	54	41	37	23	41	62	27	19	41	37	27	19	38	27	

Таблиця 8.3 – Обмеження на виготовлення й експлуатацію

Варіант	Розмір фонду на оснащення цеху печами, тис. грн					Лімітована кількість електричної енергії, кВт					Лімітована кількість газу, м <sup>3</sup>					Розмір першої партії заготовок, т					Розмір другої партії заготовок, т					Вільна корисна площа печі, дм <sup>2</sup>				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	А	3830	3940	3950	3920	3600	13000	14000	16000	12000	13000	1000	2000	1000	3000	2000	10	8	7	9	10	8	7,5	8	7	6	10	11	12	9
Б	3850	3880	3890	3880	3890	12000	11000	14000	11000	14000	1500	1500	2000	2000	2500	9	9	8	9	8,5	6	7	4	6	5	9	10	13	12	11
В	2110	2220	2150	2220	2310	4300	3500	5300	4300	5300	800	900	1000	1000	800	35	32	31	32	27	54	51	51	53	52	21	20	19	20	23
Г	2150	2210	2200	2190	2260	6300	5600	4500	4400	4500	800	900	800	800	1200	31	30	29	30	39	54	52	54	50	49	25	21	22	17	18
Д	10220	10100	10120	10150	10100	4300	5400	4300	6200	4300	2200	2400	2600	2100	3100	25	21	20	21	15	19	19	15	21	10	12	12	12	14	18
Е	10270	10700	10210	10600	10300	6300	6600	6300	6100	4500	3000	2600	2800	2800	2300	28	25	24	25	22	18	21	19	17	19	15	18	10	18	18

Таблиця 8.4 – Питомі експлуатаційні характеристики

Варіант	Стандартна камерна електропіч для:										Піч-ванна з використанням розплавів солей NaCl і BaCl <sub>2</sub>					Газова нагрівальна піч					
	гартування					гартування, сумішена з водяним баком															
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
<i>I</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
Вартість однієї печі, тис. грн	А	86	77	74	82	81	122	120	116	109	117	163	160	159	158	157	202	200	198	196	199
	Б	77	79	82	84	76	118	121	118	121	115	155	163	157	159	160	189	194	199	191	189
	В	34	30	29	26	31	60	54	58	59	57	74	72	69	71	68	96	93	88	91	87
	Г	32	31	28	31	27	53	57	52	60	55	73	74	71	69	72	94	92	91	95	90
	Д	108	101	104	98	104	306	297	290	296	291	412	406	398	410	400	500	480	495	500	491
	Е	102	106	99	96	107	300	302	297	306	305	408	410	411	402	409	496	499	491	497	500
Використання енергії, кВт(м <sup>3</sup> )/год	А	320	310	290	290	300	180	180	170	160	170	180	150	160	170	180	200	170	180	190	200
	Б	280	320	310	290	280	150	170	180	170	160	160	170	170	180	150	180	190	190	200	170
	В	160	130	140	160	140	80	70	80	60	70	80	70	80	60	70	120	100	110	80	90
	Г	150	150	130	120	160	60	50	70	70	60	60	60	70	70	60	110	120	100	110	120
	Д	210	210	200	180	160	160	140	150	130	140	160	140	150	140	140	190	190	160	180	170
	Е	190	180	190	170	180	150	130	160	140	140	150	130	160	140	140	170	180	170	190	160
Продуктивність по 1-й паргії, кг/год	А	160	160	170	180	180	460	480	480	470	490	510	520	530	530	510	740	780	770	760	750
	Б	160	180	190	170	160	480	490	470	490	500	540	540	530	520	520	750	790	760	780	760
	В	60	680	660	680	690	1200	1200	1400	1200	1500	1400	1600	1700	1400	1700	2100	1700	1800	1900	2000
	Г	640	670	690	600	670	1400	1300	1700	1200	1400	1400	1900	2000	1800	1500	2000	1900	1800	2100	1700
	Д	300	380	390	360	380	900	960	970	980	900	1100	1300	1200	1500	1100	1700	2300	1800	1900	2300
	Е	370	300	380	390	360	940	990	930	960	980	1700	1400	1600	1100	1300	2100	1900	1700	1700	1900

**Продовження таблиці 8.4**

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Продуктивність по 2-й партії, кг/год	А	120	140	140	130	150	380	410	400	390	390	410	430	420	410	430	690	720	710	740	720	
	Б	130	140	120	150	140	390	380	420	400	410	440	420	410	440	420	730	690	700	690	710	
	В	900	950	910	940	900	1700	2100	2400	1900	1700	2300	2500	2900	2500	2700	3200	3600	3800	4100	3400	
	Г	980	950	960	980	990	1900	2200	1700	1800	1900	2800	2500	2600	2400	2300	3300	3700	3500	3400	3300	
	Д	500	540	560	580	590	800	890	870	840	890	900	1100	1100	1300	1200	1000	1200	1500	1100	1500	
	Е	580	560	540	590	500	850	830	890	800	800	1400	1200	1200	1100	1400	1400	1300	1000	1100	1400	
Питоме використання корисної площі	А	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	
	Б	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	
	В	0,8	0,7	0,8	0,6	0,8	0,5	0,5	0,4	0,3	0,4	0,4	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	
	Г	0,5	0,8	0,6	0,6	0,7	0,3	0,4	0,5	0,4	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	
	Д	0,6	0,5	0,4	0,3	0,4	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2	0,3	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,2	
	Е	0,5	0,6	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	

**Таблиця 8.5 – Приклад вибору завдання**

		Піч 1-го виду					Піч 2-го виду				Піч 3-го виду					Піч 4-го виду				
Ціна однієї печі, тис. грн	Енерго-споживання, кВт	Продуктивність (1-ша партія заготовок)	Продуктивність (2-га партія заготовок)	Питоме використання корисної площі	Ціна однієї печі, тис. грн	Енерго-споживання, кВт	Продуктивність (1-ша партія заготовок)	Продуктивність (2-га партія заготовок)	Питоме використання корисної площі	Ціна однієї печі, тис. грн	Енерго-споживання, кВт	Продуктивність (1-ша партія заготовок)	Продуктивність (2-га партія заготовок)	Питоме використання корисної площі	Ціна однієї печі, тис. грн	Енерго-споживання, м <sup>3</sup>	Продуктивність (1-ша партія заготовок)	Продуктивність (2-га партія заготовок)	Питоме використання корисної площі	
86	320	160	120	0,4	122	180	460	380	0,2	163	180	510	410	0,1	202	200	740	690	0,1	
Витрати на експлуатацію однієї печі, грн																				
54					62					71					19					
Фонд на придбання і монтаж печей – 3860 тис. грн. Лімітована кількість електричної енергії – 13000 кВт. Лімітована кількість газу – 1000 м <sup>3</sup> .										Розмір 1-ї партії заготовок – 10000 кг. Розмір 2-ї партії заготовок – 8000 кг. Вільна корисна площа печі – 10 дм <sup>2</sup>										

Ця кількість забезпечила мінімальні витрати на експлуатацію для заданих програм оброблення заготовок, за умови, що будуть забезпечені обмеження щодо фонду на придбання устаткування, кількості використовуваної електричної енергії (для електричних печей) і газу (для газових печей) та вільної корисної площі печей.

Набудова EXCEL «Пошук рішення» дозволяє подати результати пошуку розв'язку в формі звітів. Існує три типи таких звітів:

Результати (Answer): у звіт включаються вхідні та вихідні значення цільової і змінних комірок, додаткові відомості про обмеження.

Вихідні дані вибрати у таблицях 8.2–8.4 (приклад вибору завдання для варіанта 1А наведений у таблиці 8.5).

### **Зміст звіту лабораторної роботи**

1. Назва та мета роботи.
2. Математична модель задачі.
3. Запис задачі в канонічному вигляді.
4. Початкова симплекс – таблиця.
5. Результати проміжних розрахунків – ітерацій
6. Висновки про результати оптимізації.
7. Висновки до роботи.

**Зауваження:** скрінні екрана, графіки тощо є тільки ілюстративним матеріалом. Основою звіту до лабораторної роботи повинен бути текст створений особисто здобувачем в результаті проведеного ним дослідження. Зазначені матеріали є або частиною звіту, або додатком (за умови великого їх обсягу).

### **Тестові завдання**

Вкажіть одну правильну або декілька правильних відповідей.

#### **1. Модель – це:**

- а) сукупність елементів та зв'язків між ними;
- б) спеціально створений об'єкт на якому відтворені певні характеристики досліджуваного об'єкта з метою їх вивчення;
- в) реальний об'єкт, що підлягає вивченню;
- г) деяка штучна система, фізична або абстрактна, що спрощено відбиває структуру і основні закономірності розвитку реального об'єкта так, що її вивчення подає інформацію про стан і поведінку досліджуваного об'єкта;
- д) штучний об'єкт, що відбиває усі характеристики реального об'єкта.

## **2. Математична модель – це:**

- а) сукупність елементів і зв'язків між ними, описані символічно;
- б) спеціально створений об'єкт на якому відтворені певні характеристики досліджуваного об'єкта з метою їх вивчення;
- в) реальний об'єкт, що підлягає вивченню та описаний символічно;
- г) деяка штучна система, фізична або абстрактна, що спрощено відбиває структуру і основні закономірності розвитку реального об'єкта так, що її вивчення подає інформацію про стан і поведінку досліджуваного об'єкта;
- д) штучний об'єкт, що відбиває усі характеристики реального об'єкта та описаний математично.

## **3. Моделювання – це:**

- а) послідовне дослідження об'єкта, що вивчається;
- б) відображення характеристик реального об'єкта, що вивчається;
- в) спосіб відображення розглянутих характеристик досліджуваного об'єкта;
- г) спеціально створений об'єкт на якому відтворені певні характеристики досліджуваного об'єкта з метою їх вивчення.

## **4. Оберіть задачі, моделі яких зводяться до оптимізаційних задач або до задач математичного програмування:**

- а) задача про оптимальний план випуску продукції;
- б) оптимізація міжгалузевих потоків;
- в) вибір маршруту;
- г) визначення найкращого складу суміші;
- д) транспортна задача.

## **5. Види математичних моделей в залежності від цільової функції та обмежень є:**

- а) лінійні, нелінійні, динамічні, стохастичні, дискретні, евристичні;
- б) однокрокові, багатокрокові, динамічні;
- в) детерміновані, стохастичні, неперервні, дискретні, лінійні, нелінійні;
- г) лінійні, нелінійні;
- д) правильної відповіді немає.

## **6. Якими методами можна розв'язати задачу лінійного програмування:**

- а) метод поточкового наближення;
- б) симплекс-метод;
- в) метод найменших квадратів;
- г) графічний метод;
- д) всі відповіді правильні.

**7. Загальний вигляд задачі лінійного програмування є:**

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$f(X) = C \cdot X \rightarrow \max(\min)$$

$$A \cdot X \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} B$$

$$X \geq 0$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

а) б) в)

$$\max(\min)\{C \cdot X\}; \quad G = \{A \cdot X \leq B, X \geq 0\}$$

$$X \in G.$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

г)

**8. Вкажіть максимальне значення цільової функції для задачі:**

$$f(X) = -3x_1 - 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 12x_1 + 7x_2 \leq 84, \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$

- а)  $f_{\max}(X) = 30$ ;                      в)  $f_{\max}(X) = 0$ ;                      д)  $f_{\max}(X) = 27$   
 б)  $f_{\max}(X) = 25$ ;                      г)  $f_{\max}(X) = 12$ ;

**9. Виберіть етапи для побудови математичної моделі:**

- а) розглядають причинно-наслідкові зв'язки;  
 б) розробляють алгоритм;  
 в) всі відповіді вірні;  
 г) використовують аналогію;  
 д) проводять експертизу, якщо можливо, для виявлення істотних

змін.

**10. Змінні які можна змінювати у певних межах – це:**

- а) незалежні змінні;                      г) залежні змінні;  
 б) керовані змінні;                      д) коефіцієнти.  
 в) параметри;

**11. Набір керованих змінних, на якому досягається максимум чи мінімум цільової функції, називається планом:**

- а) допустимим;                      в) оптимальним;                      д) випуску.  
 б) відповідним;                      г) найкращим;

## Контрольні питання

1. Складові елементи моделі математичного програмування.
2. Означте поняття допустимої множини розв'язків задачі математичного програмування й опишіть способи її визначення.
3. Які задачі називають задачами лінійного програмування?
4. Що називають допустимим розв'язком (планом) ЗЛП?
5. Який допустимий розв'язок називають опорним?
6. Який розв'язок (план) ЗЛП називають оптимальним?
7. У яких формах можна записати ЗЛП?
8. Яку форму називають загальною, канонічною, симетричною? У чому відмінність між ними?

*Література:* [2, с. 7–13; 3, с. 73–89, 185–204; 4, с. 40–61]

## Література

---

### *Основна*

1. Горват А. А. Методи обробки експериментальних даних з використанням MS Excel : навч. посіб. / А. А. Горват, О. О. Молнар, В. В. Мінкович. – Ужгород : вид-во УжНУ «Говерла», 2019. – 160 с.
2. Яганов П. О. Моделювання технічних систем і технологічних процесів вибрані розділи регресійний аналіз : навч. посіб. – Київ : НТУУ «КПІ», 2023. – 54 с.
3. Павленко П. М. Математичне моделювання систем і процесів : навч. посіб. / П. М. Павленко, С. Ф. Філоненко, О. М. Чередніков, В. В. Трейтяк. – Київ : НАУ, 2017. – 392 с.
4. Сігова В. І. Основи комп'ютерного матеріалознавства : навч. посіб. / В. І. Сігова, О. М. Алексєєв. – Суми : вид-во СумДУ, 2008. – 207 с.

### *Додаткова*

5. Бузило В. І. Матеріалознавство : навч. посіб. / В. І. Бузило, В. П. Сердюк, А. В. Яворський, О. А. Гайдай. – Дніпро : НТУ «ДП», 2021. – 243 с.
6. Любич О. Й. Експериментальне забезпечення наукових досліджень : навч. посіб. / О. Й. Любич, А. Ф. Будник. – Суми : вид-во СумДУ, 2009. – 186 с.
7. Математичне моделювання систем і процесів. Конспект лекцій : навч. посіб. / уклад. : Н. В. Богданова, О. В. Богданов. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 85 с.
8. Комп'ютерні технології в матеріалознавстві : навч.-метод. посіб. / О. Є. Бармін, О. Є. Вуєць, А. І. Зубков та ін. ; за ред. О. В. Соболя та І. М. Колупаєва. – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – 272 с.
9. Лапач С. М. Теорія планування експериментів: Виконання розрахунково-графічної роботи : навч. посіб. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 86 с.



## Зміст

---

<b>Вступ</b> .....	3
<b>Лабораторна робота 1</b> Планування експериментів при розробленні складу високоміцного твердого сплаву для оброблення деталей, що дають зливну стружку .....	6
<b>Лабораторна робота 2</b> Оцінювання аномальності результатів вимірювань при контролі глибини дифузійного хромованого шару сталі 4X5MФ1С .....	20
<b>Лабораторна робота 3</b> Визначення оцінок і довірчих границь для параметрів нормального розподілу при вимірюванні твердості сталі .....	27
<b>Лабораторна робота 4</b> Розрахунок параметрів дослідного розподілу і оцінювання достовірності впливу термічного оброблення на твердість хромованого шару сталі .....	33
<b>Лабораторна робота 5</b> Визначення закону розподілу випадкової величини при вимірюванні твердості сталі .....	42
<b>Лабораторна робота 6</b> Парний регресійний аналіз результатів експериментів при визначенні здатності деталей до крихкого руйнування .....	49
<b>Лабораторна робота 7</b> Інтерполяція й екстраполяція таблиць при призначенні режиму нагріву сталевих виробів у полум'яних печах та соляних ваннах .....	64
<b>Лабораторна робота 8</b> Оптимізація оснащення термічного цеху методом лінійного програмування .....	69
<b>Література</b> .....	87